Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Lateinschulen

von

X. Steck und Dr. J. Bielmayr.

Vierte verbesserte Auflage.

Kempten.
Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.
1875.

Vom k. b. Kultus-Ministerium zur Einführung in den Lehranstalten des Königreichs Bayern genehmigt.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Antihypochondricus. Sammlung von 198 neuen Anekdoten nebst drei humoristischen Deklamationsstücken. Herausgegeben von einem schwäbischen Landpfarrer. 12°. broch. Preis 7½ Sgr. oder 27 kr.

„... Guter Humor ist zweifelsohne ein Konservirungsmittel der heute mehr als je nothwendigen Geistesfrische, und als solches empfehlen wir diesen „Antihypochondricus" unsern Lesern um so lieber, als seine Anekdoten wirklich „Witz" und Geist enthalten, in allweg die gute Sitte und den Anstand wahren und durchaus frei sind von jenen übelriechenden Zuthaten, welche nicht selten Anekdotenkrämer zu verächtlichen Zoten- und Possenreissern machen."
[Augsb. Postztg. 1873 Nr. 29.]

Balde's, J. J., **Oden**, metrisch übersetzt von J. B. Neubig. 3 Bände, mit dem Porträt des Verfassers. gr. 8°. Preis pro Band 27 Sgr. oder fl. 1. 30 kr.

Baumann, Dr. F. L., **Die oberschwäbischen Bauern** im März 1525 und die zwölf Artikel. 8°. Preis broch. 14 Sgr. oder 48 kr.

Ciceronis ***Cato Major*** seu de senectute, et ***Lælius*** sive de amicitia. Mit erläuternden Anmerkungen von Joh. Bapt. Mayer. gr. 8°. Preis fl. 1. 30 kr.

L'Echo français. Journal non politique, rédigé par D. Dornier. 4°. Jahrg. 1868 bis 1872. Preis pro Jahrg. einzeln 2 Thlr. oder fl. 3. 36, alle zusammengenommen à 1 Thlr. oder fl. 1. 45 kr.

Einsle, L., **Systematische Zusammenstellung** der vorzüglichsten europäischen Maße, Gewichte und Münzen, mit besonderer Rücksicht auf das Königreich Bayern und die größeren Zollvereinsstaaten, nebst vielen erläuternden und gemeinnützigen Anmerkungen, auch Notizen über die bayer. Landesvermessung und den bayer. Grundsteuerkataster enthaltend, für Schulen und zum Privatgebrauche, als praktischer Anhang zu jedem Lehrbuche der Arithmetik. gr. 12°. Herabgesetzter Preis 7½ Sgr. od. 24 kr.

Gratz, Dr. L. Clem., **Erd- und Länderkunde der hl. Schrift** für kath. Schulen und Familien zur Erläuterung der heil. Geschichte des alten und neuen Bundes. Unter Gutheissung des hochw. bischöfl. Ordinariates Augsburg. gr. 12°. Herabgesetzter Preis 7 Sgr. 24 kr.

Haggenmiller, J. B., **Genealogie der Hohenzollern** von 1061—1871. Preis cart. 7½ Sgr. oder 27 kr.

In der Kösel'schen Buchhandlung in Kempten ist soeben in Form eines grossen Bogens erschienen eine genealogische Uebersicht (Stammbaum) des neuen deutschen Kaiserhauses (preuß. Königshauses). Diese Familie beginnt mit Burkart I. († 1061), dann folgte Friedrich I. von Zollern († 1120), dann Friedrich II. († 1142). Von ihm stammen dann her die Nürnberger-Linie und die Zollern-Linie. Letztere ging dann fort bis zum Fürsten Karl Anton von Sigmaringen, welcher 1849 sein Land an Preußen abtrat. Die andere Linie (Nürnberg) repräsentirten u. A. die Fürsten Albrecht Achilles in Ansbach und Bayreuth († 1486), Johann Cicero († 1499), Joachim I und II., später Friedrich I. (Wilhelm) König († 1740), Friedrich II. der Große († 1784), Friedrich Wilhelm II. († 1797), Friedrich Wilhelm III. König von 1797 bis 1840, Friedrich Wilhelm IV. (1840—1861), sodann dessen Bruder Wilhelm I., nun deutscher Kaiser.
[Augsb. Tagbl. 1872 17. Juli.]

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Lateinschulen

von

F. Steck und Dr. J. Bielmayr.

Vierte verbesserte Auflage.

Kempten.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.

1875.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die Nachricht, daß die vor kaum einem Jahre erschienene Auflage unseres Lehrbuches vergriffen sei und, um den vorliegenden Bestellungen entsprechen zu können, eine neue mit größter Beschleunigung hergestellt werden müsse, war uns als ein Beweis der Anerkennung, welche unser Werkchen gefunden hat, begreiflicher Weise im höchsten Grade erfreulich. Dennoch war diese Freude nicht ungetrübt, weil wir nach dem Vorschlage unseres Herrn Verlegers im Interesse der erwähnten Beschleunigung auf die Correktur der Druckbogen verzichten mußten. Unsere verehrten Herrn Collegen werden nun zwar hoffentlich mit uns finden, daß die Correktur am Druckorte mit all jener Sorgfalt und Geschick, welche man unter diesen Verhältnissen erwarten durfte, besorgt wurde; allein es fehlt dennoch nicht an Abweichungen, welche unter andern Umständen sicherlich vermieden worden wären. Hätten wir diese Abweichungen alle unter den „Verbesserungen" aufgeführt, so würde deren Anzahl allzu groß geworden sein — deßhalb haben wir Dasjenige an der erwähnten Stelle weggelassen, was

uns als weniger störend erschien. Während wir in dieser Beziehung auf die Zustimmung unserer verehrten Herrn Collegen hoffen, bitten wir mit Rücksicht auf die erwähnten Verhältnisse für das Übrige um Entschuldigung.

Wesentliche Änderungen hielten wir um so weniger für angezeigt, weil sich unser Büchlein gerade in seiner gegenwärtigen Gestalt eine so große Anzahl von Freunden erworben hat — dagegen wird man hoffentlich beim Vergleiche mit der vorhergehenden Auflage eine sorgfältige Durchsicht nicht vermissen. Da die Zusammenfassung der Materien in § 47 der Behandlung in den übrigen Theilen des Buches nicht entsprach, haben wir diesen Paragraph in drei vertheilt und, um die gleichzeitige Benützung der vorhergehenden Auflage nicht zu erschweren, bei den folgenden Paragraphen die frühern Nummern beigesetzt. Daß wir die in Folge des Münzgesetzes sich ergebenden neuen Geldverhältnisse, welche in der vorigen Auflage noch nicht berücksichtigt waren, in dem größeren Theile der betreffenden Fälle eingeführt haben, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Indem wir unsern Dank für die freundliche Aufnahme unserer Arbeit wiederholt aussprechen, übergeben wir dieselbe aufs Neue der freundlichen Benützung und wohlwollenden Beurtheilung.

Die Verfasser.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Bei der Herstellung des Buches war es unsere Absicht, auf wenigen Bogen sowohl die Regeln, als auch

eine der Fassungskraft der Schüler entsprechende Begründung derselben den Letzteren in die Hand zu geben, welche beide vorgetragen werden müssen, wenn dem von der höchsten Stelle aufgestellten Lehrplane entsprechend der Unterricht in der gemeinen Arithmetik sowohl geistig bildend, als für den Schüler anziehend sein soll, was ganz gewiß nur dann der Fall ist, wenn derselbe auf das Verständniß gegründet ist. Daß die Begründung der Regeln manchmal ausführlicher, manchmal mehr andeutungsweise gegeben wurde, wird man uns kaum zum Vorwurfe machen, da durch weitere Ausführung aller Begründungen der Umfang des Buches ohne entsprechenden Nutzen vergrößert worden wäre, während es dem Schüler leicht werden muß, nicht nur einzusehen, daß ein folgender Satz auf gleiche Weise wie ein vorausgehender ähnlicher begründet werden kann, sondern auch aus den gegebenen Andeutungen bei geeigneter Nachhilfe des Lehrers diese Begründung selbst auszuführen.

Durch die Herausgabe unserer Arbeit hoffen wir auch unseren Collegen einen Dienst zu erweisen, und empfehlen ihnen dieselbe mit der freundlichen Bitte, uns ihre Bemerkungen über das Buch gefälligst mitzutheilen, um bei einer etwaigen neuen Auflage gebührende Berücksichtigung zu finden. Ebenso glauben wir, daß unser Buch beim Unterrichte in Gewerbschulen mit gutem Erfolge benützt werden kann. Aus diesem Grunde ersuchen wir auch die betreffenden Lehrer an diesen Anstalten um gefällige Mittheilung ihrer Ansicht über unsere Arbeit.

Inhaltsverzeichniß.

Berichtigungen.

Seite 7 Zeile 14 von unten statt: eine beliebige lies: einen beliebigen.
„ 15 „ 7 „ oben „ 5 + 3 „ 5 × 3
„ 19 3) c) lies:

```
24138×4246
 16984-
 8492--
  12738
  33968
---------
102489948
```

„	28	Zeile	8	von unten	statt:	auf gegebene	lies:	auf die gegebene.
„	65	„	4	„ „	„	0,004302302	„	0,04302302.
„	66	„	3	„ oben	„	0,004302302	„	0,04302302.
„	66	„	15	„ „	„	460,073232	„	460,063232.
„	67	„	5	„ unten	„	bei	„	be=
„	72	„	10	„ oben	„	38	„	2.
„	72	„	13	„ „	„	drei	„	zwei.
„	72	„	14	„ „	„	eben so viele	„	vier.
„	72	„	21	„ „	„	§ 47	„	§ 48.
„	80	„	14	„ „	„	vierfach	„	vierfache.
„	80	„	19	„ „	„	siebenfach	„	siebenfache.
„	82	„	13	„ unten	„	= : 420	„	= 42 : 420.
„	87	„	6	„ oben	„	§ 52	„	§ 55.
„	89	„	4	„ „	„	§ 56	„	§ 59.
„	90	„	1, 2, 3, 4	von unten	statt:	b, L, r, W	lies:	1 b, 1 L, 1 r, 1 W.
„	91	„	10	von unten	statt:	recht=	lies:	rechts.
„	100	„	15	„ oben	„	1 fl. 48 kr.	„	2 M. 16 Pf.
„	100	„	16	„ „	„	1 fl. 24 kr.	„	1 M. 68 Pf.
„	100	„	16	„ „	„	54 kr.	„	1 M. 8 Pf.
„	100	„	17	„ „	„	1 fl. 12 kr.	„	1 M. 44 Pf.

Einleitung.

§ 1.

Gegenstände, welche in gewissen Merkmalen übereinstimmen, heissen in Beziehung auf diese Merkmale gleichartig.

Um die Größe eines Dinges darzustellen, hat man anzugeben, wie oft ein anderes gleichartiges Ding, welches Einheit genannt wird, genommen werden muß, um das gegebene Ding zu erhalten. Diese Operation heißt Messen und das Resultat dieser Messung Zahl. Die Zahl drückt also eine Menge von Einheiten aus. Wird bei einer Zahl bloß auf die Menge, nicht aber auf die Art der Einheit Rücksicht genommen, so heißt sie eine unbenannte Zahl; wird aber auch die Art der Einheiten angegeben, so heißt die Zahl eine benannte Zahl (Größe).

Die Verbindung der Zahlen, um daraus andere unbekannte Zahlen abzuleiten, heißt Rechnen; die Lehre davon Arithmetik.

Erste Abtheilung.

Das Rechnen mit unbenannten Zahlen.

I. Das Numeriren.

§ 2.

Um die Zahlen auszudrücken, sind Wörter und Zeichen nothwendig. Die Wörter nennt man Zahlwörter, die Zeichen heissen Zahlzeichen oder Ziffern.

Der Unterschied zwischen Zahlen und Zahlzeichen (Ziffern) ist wohl zu beobachten, wenn auch häufig, der Kürze wegen, das Wort „Ziffer" (Zifferstelle) statt „durch die Ziffer bezeichnete Zahl" gebraucht wird.

Es ergibt sich zunächst die doppelte Aufgabe:

a) jede in Ziffern gegebene Zahl auszusprechen, und

b) jede ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Diese doppelte Verrichtung heißt Numeriren.

Man hat bloß neun Ziffern, welche ihre Bedeutung dadurch erhalten, daß die erste die Einheit, jede folgende aber immer die um eins größere Zahl bezeichnet. Diese neun auf einander folgenden Ziffern sind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun.

Zu diesen kommt noch die 0 (Null), welche keine Menge von Einheiten bedeutet, sondern nur anzeigt, daß an der Stelle, an welcher sie steht, keine geltende Ziffer ist.

Es sind unendlich viele verschiedene Zahlen denkbar; damit nun alle denkbaren Zahlen mit den obigen neun Ziffern geschrieben werden können, ist folgende Anordnung gemacht worden:

1) Zehn Einheiten einer Ordnung bilden immer eine Einheit der nächst höhern Ordnung. Die Einheiten der niedrigsten Ordnung heißen Einer, zehn Einer geben einen Zehner, zehn Zehner geben einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, zehn Zehntausender einen Hunderttausender, zehn Hunderttausender eine Million u. s. f.

2) Die verschiedenen Ordnungen werden beim Schreiben dadurch angezeigt, daß man jede Ziffer, welche Einheiten der nächst höhern Ordnung ausdrücken soll, um eine Stelle von rechts nach links vorrückt, so daß, wenn mehrere Ziffern neben einander stehen, die Ziffer an der ersten Stelle, von rechts gezählt, die Einer, jene an der zweiten Stelle die Zehner, die an der dritten Stelle die Hunderter u. s. f. bedeutet.

Es hat also jede Ziffer einen doppelten Werth, nämlich denjenigen Werth, wodurch die Menge der Einheiten ausgedrückt ist, welcher Nominal- oder Nennwerth heißt, und denjenigen Werth, welcher der betreffenden Einheit vermöge der Stelle, an welcher sie steht, zukommt, und dieser wird Lokal- oder Stellenwerth genannt.

Diese Art, alle denkbaren Zahlen durch obige zehn Ziffern darzustellen, heißt das Zehnersystem oder das dekadische Zahlensystem (Dezimalsystem).

Eine Zahl dekadisch anschreiben, heißt, jede einzelne Ziffer derselben ihrem Stellenwerthe gemäß anschreiben.

Diese Zahlen-Verbindungen lassen sich in Klassen von je drei Stellen von rechts nach links eintheilen, so daß sich stets dieselben Wörter, Einer, Zehner, Hunderter, nur jede Klasse mit einem andern Beinamen, wiederholen. Die niedrigste Klasse enthält die Einer, Zehner und Hunderter, die nächste die Einer, Zehner und Hunderter von den Tausendern, die folgende die Einer, Zehner und Hunderter von den Millionen u. s. f.

Beim Aussprechen geschriebener Zahlen beobachte man Folgendes:

1) Hat die Zahl bloß drei Ziffern, so spricht man zuerst die Hunderter, dann die Einer und zuletzt die Zehner. Steht an einer Stelle 0, so wird diese gar nicht gesprochen.

2) Jede Zahl mit mehr als drei Ziffern wird zuerst in Klassen von rechts nach links zu je drei Stellen eingetheilt. Nach der ersten, dritten und fünften Klasse u. s. f. mache man oben einen Punkt, nach der zweiten Klasse oben ein Komma, nach der vierten oben zwei Kommata, nach der sechsten oben drei Kommata u. s. f. Sodann lese man, von links angefangen, jede Klasse für sich und setze, wenn ein Punkt folgt, Tausend, wenn ein Komma folgt, Million(en), wenn zwei Kommata folgen, Billion(en) u. s. f. dazu.

Beim Anschreiben der Zahlen ist Folgendes zu merken:

1) Ist die Zahl kleiner als Tausend, so schreibe man die Hunderter an die dritte, die Zehner an die zweite und die Einer an die erste Stelle von rechts. Jede Stelle, an welche keine Ziffer zu stehen kommt, wird, wenn noch eine höhere Stelle vorkommt, durch eine Null ausgefüllt.

2) Ist die Zahl größer als Tausend, so schreibe man die Zahl zuerst, nach welcher das erstemal Tausend, Million oder Billion u. s. f. gesprochen wurde. Dabei ist zu beobachten, daß nach Million noch zwei Klassen, also 6 Stellen, nach Tausend eine Klasse, also drei Stellen folgen.

Die oben genannten Ziffern heißen arabische. Die Römer gebrauchten statt derselben einige Buchstaben ihres Alphabetes. Es ließen sich noch sehr viele andere Zahlensysteme bilden, die aber meist weitläufiger wären, als das soeben besprochene dekadische System.

Anmerkung. Ein oder mehrere Zeichen, welche eine Zahl bedeuten, nennt man Ausdruck.

II. Addiren unbenannter Zahlen.

§ 3.

1) Addiren heißt aus zwei oder mehreren Zahlen eine neue bilden, welche so viele Einheiten hat, als die gegebenen Zahlen zusammen. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden, die gesuchte Zahl nennt man Summe. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), welches plus (mehr) gelesen wird.

2) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Zeichen plus, so hat man ein Summe, z. B. 4 + 6 ist eine Summe, deren Werth 10 ist, welcher mit der Summe 4 + 6 durch das Gleichheitszeichen (=) verbunden werden kann, also

4 + 6 = 10; d. h. vier plus sechs ist gleich zehn.

3) In jeder Summe darf man die Summanden vertauschen, z. B. 5 + 7 = 7 + 5; denn es ist gleichgiltig, ob man zu 5 die Zahl 7, oder zu 7 die Zahl 5 addirt, die Menge der Einheiten ist in beiden Fällen dieselbe.

Anmerkung. 1) Zwischen der Summe und ihrem Werthe ist wohl zu unterscheiden.

2) Wird eine Summe (oder irgend ein zusammengesetzter Ausdruck) mit andern Ausdrücken verbunden, so schließt man sie in Klammern.

3) Werden zwei gleiche Ausdrücke (welche dieselbe Zahl bedeuten) durch das Gleichheitszeichen verbunden, so erhält man eine Gleichung.

§ 4.

Sollen mehrzifferige Zahlen addirt werden, so kann das nur dadurch geschehen, daß man die Ziffersteller (§ 2) von gleichem Stellenwerthe (gleichnamige Ziffersteller) d. h. Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern u. s. f. addirt. Hat man also z. B. 4283 + 2662, so erhält man, wenn die gleichnamigen Zifferstellen unter einander geschrieben werden, folgende Darstellung:

$$\begin{array}{r} 4283 \\ \underline{2662} \\ 6945. \end{array}$$

2 Einer und 3 Einer geben 5 Einer, also ist 5 wieder an die Stelle der Einer zu setzen, 6 Zehner und 8 Zehner sind 14 Zehner, 14 Zehner geben aber 1 Hunderter und 4 Zehner, die 4 Zehner kommen unter die Zehner, 1 Hundert aber wird zu den Hunderten gezählt, also 1 Hundert, 6 Hundert und 2 Hundert geben 9 Hundert, mithin 9 unter die addirten Zifferstellen, endlich

2 Tausend und 4 Tausend sind 6 Tausend, also 6 unter die Tausender.

Ebenso verfährt man bei der Addition mehrerer Zahlen; z. B. 47048 + 3999 + 984582 gibt:

$$\begin{array}{r} 47048 \\ 3999 \\ 984582 \\ \hline 1035629. \end{array}$$

Es folgt also hieraus für die Addition mehrzifferiger Zahlen folgende Regel:

Man addirt nach einander die gleichnamigen Zifferstellen, indem man mit den Einern beginnt. Erhält man hiebei eine zwei- oder mehrzifferige Zahl als Summe, so bekommen ihre Einer den Lokalwerth der addirten Stellen, die Zehner aber zählt man zur nächst höheren Stelle.

III. Subtrahiren unbenannter Zahlen.

§ 5.

1) Subtrahiren heißt von einer gegebenen Zahl so viele Einheiten wegnehmen, als deren eine andere gegebene Zahl hat. Die Zahl, von welcher hinweggenommen wird, heißt Minuend, die Zahl, welche hinweggenommen wird, Subtrahend, und die gesuchte Zahl, Rest, Unterschied oder Differenz.

Das Zeichen der Subtraktion ist ein horizontaler Strich (—) und wird minus (weniger) gelesen.

2) Obiger Erklärung zufolge ist die Differenz eine Zahl, die anzeigt, wie viele Einheiten der Minuend mehr hat als der Subtrahend. Es läßt sich also der Minuend als eine Summe betrachten, deren einer Summand der Subtrahend, deren anderer Summand die Differenz ist. Daraus folgt eine zweite Erklärung vom Subtrahiren, nämlich: Subtrahiren heißt aus einer Summe und einem Summanden derselben den andern Summanden suchen.

3) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Zeichen —, so hat man eine Differenz, z. B. 8 — 6 ist eine Differenz, deren Werth 2 ist, so daß man also hat 8 — 6 = 2.

4) Aus der zweiten Erklärung folgt: die Differenz zum Subtrahenden addirt, muß den Minuenden geben; denn der Minuend ist die gegebene Summe, der Subtrahend der gegebene Summand, und die Differenz der gesuchte Summand.

5) Der Werth einer Differenz bleibt ungeändert, wenn man zum Minuenden und Subtrahenden dieselbe Zahl addirt oder davon subtrahirt; denn es bleibt dadurch der Unterschied, folglich (nach 2) die Differenz dieselbe.

6) Eine Differenz, deren Subtrahend dem Minuenden gleich ist, wird durch 0 bezeichnet.

§ 6.

1) Beim Subtrahiren einer mehrzifferigen Zahl hat man auf dieselbe Art zu verfahren wie beim Addiren, man muß auch hier die gleichnamigen Zifferstellen subtrahiren. Z. B. 5968 — 4783.

$$\begin{array}{r} 5968 \\ 4783 \\ \hline 1185 \end{array}$$

3 Einer von 8 Einern bleiben 5 Einer; 8 Zehner lassen sich von 6 Zehnern nicht subtrahiren, deßhalb nimmt man von den Hunderten des Minuenden einen weg, was gewöhnlich durch einen Strich angezeigt wird, verwandelt diesen in 10 Zehner und addirt dazu die schon vorhandenen 6 Zehner des Minuenden, also 10 und 6 sind 16 Zehner, 8 von 16 bleiben 8 Zehner; 7 Hundert von 8 Hundert bleibt 1 Hundert; endlich 4 Tausend von 5 Tausend 1 Tausend. Daraus ergibt sich folgende Regel:

Man subtrahire die gleichartigen Zifferstellen, indem man bei der niedrigsten Stelle beginnt; ist aber eine Stelle des Minuenden kleiner als die entsprechende des Subtrahenden, so nehme man von der nächst höhern Stelle des Minuenden eine Einheit, welche zehn Einheiten der zu subtrahirenden Ordnung gibt, und addire dazu die schon vorhandenen Einheiten, so daß von der Summe subtrahirt werden kann. Dieses Letztere, wenn nämlich eine Stelle des Minuenden kleiner ist als die entsprechende des Subtrahenden, läßt sich dahin abändern, daß man zehn Einheiten zur Stelle des Minuenden und eine Einheit zu der nächst höhern Ordnung des Subtrahenden addirt, wodurch (nach § 5, 5) die Differenz nicht geändert wird.

Z. B. 94376 — 23592

94376	2 von 6 bleiben 4
23592	9 „ 17 „ 8
70784	6 (statt 5) von 13 bleiben 7
	4 (statt 3) „ 4 bleibt 0
	2 „ 9 bleiben 7.

2) Nach § 5, 2) läßt sich die Subtraktion in eine Addition verwandeln, wenn man sucht, was zum Subtrahenden addirt werden muß, um den Minuenden zu erhalten: z. B. 4985 — 3294.

$$\begin{array}{r} 4985 \\ 3294 \\ \hline 1691 \end{array}$$

Zu 4 braucht man 1, damit man 5 erhält, also 4 und 1 gibt 5; 9 und 9 sind 18 Zehner, d. i. 8 Zehner und 1 Hunderter; 1 und 2 gibt 3 und 6 gibt 9; 3 und 1 gibt 4.

§ 7.

1) Aus der Erklärung (§ 5, 2), daß der Minuend die Summe aus dem Subtrahenden und der Differenz ist, folgt die Probe der Subtraktion: Addirt man zum Subtrahenden die Differenz, so muß man, wenn richtig gerechnet wurde, den Minuenden erhalten.

2) Aus der zweiten Erklärung vom Subtrahiren, nämlich aus einer Summe und einem Summanden den andern suchen, erhält man die Probe der Addition: Subtrahirt man von der Summe einen Summanden, so erhält man den andern. Ist aber die Summe durch Addition mehrerer Summanden entstanden, so addire man alle diese Summanden bis auf eine beliebige, und subtrahire die neu erhaltene Summe von der ersten, so muß der ausgelassene Summand erhalten werden.

§ 8.

Sind mehrere Ausdrücke theils durch Addition, theils durch Subtraktion mit einander verbunden, so heißt der dadurch erhaltene Ausdruck Aggregat (algebraische Summe, Polynom); die durch + oder — verbundenen Ausdrücke heißen Glieder des Aggregates und zwar diejenigen, vor denen + oder kein Zeichen steht, positive (additive), diejenigen, vor denen — steht, negative (subtraktive) Glieder.

Z. B. 18 — 6 + 15 — 19, heißt ein Aggregat,
18 und 15 die positiven Glieder desselben,
6 und 19 die negativen „ „

Es soll in diesem Beispiele von 18 zuerst 6 subtrahirt, zu der erhaltenen Differenz 15 addirt und dann von der Summe 19 subtrahirt werden; dieses wird aber auch dadurch erreicht, daß man 18 und 15 addirt und dann, anstatt 6 und später 19 zu subtrahiren, gleich die Summe aus 6 und 19 subtrahirt, so daß man hat: 18 — 6 + 15 — 19 = (18 + 15) — (6 + 19) = 33 — 25 = 8, d. h. die Glieder eines Aggregates können dadurch verbunden werden, daß man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen subtrahirt.

Z. B. 22 — 7 — 8 + 9 + 35 — 16 — 24 + 12 = (22 + 9 + 35 + 12) — (7 + 8 + 16 + 24) = 78 — 55 = 23.

Anmerkung. Dieses Verfahren muß dann angewendet werden, wenn bei der Verbindung der Fall vorkommt, daß ein Subtrahend größer ist als das Resultat der vorausgehenden Glieder.

Z. B. 10 — 6 — 7 + 5 = (10 + 5) — (6 + 7) = 15 — 13 = 2.

§ 9.

Bei manchen Aufgaben können Rechnungs-Abkürzungen gemacht werden.

In der Aufgabe

48907 — (22029 + 14523) = 12355

ist es nicht nothwendig, zuerst die Summe innerhalb der Klammer vollständig auszurechnen, sondern man kann zwei Stellen addiren und zugleich ihre Summe subtrahiren, wie folgt: 3 und 9 sind 12, 1 Zehner und 2 Einer, 2 von 7 bleiben 5; 1 und 2 sind 3 und 2 sind 5, 5 von 10 bleiben 5; 5 und 0 sind 5, 5 von 8 bleiben 3; 4 und 2 sind 6, 6 von 8 bleiben 2; 1 und 2 sind 3; 3 von 4 bleibt 1.

Anmerkung. Selbstverständlich kann man hier auch § 6, 2) berücksichtigen.

In der Aufgabe 46782 + 99999 addire man statt 99999 die Zahl 100000, und subtrahire von der erhaltenen Summe 1, also:

(46782 + 100000) — 1 = 146781.

In der Aufgabe 217 — 99 + 999, sowie in der Aufgabe 816 — 98 + 991 — 2 + 9 — 90 kann man die bequem zusammenzufassenden Zahlen (999 — 99, — 98 — 2, 991 + 9) zusammennehmen, bevor man die weiteren Verbindungen vornimmt.

Aehnlich in ähnlichen Fällen.

IV. Multipliziren unbenannter Zahlen.

§ 10.

1) Multipliziren heißt eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine andere Zahl Einheiten enthält; z. B. 5 multiplizirt mit 3 gibt $5 + 5 + 5 = 15$. Das Multipliziren ist demnach wiederholtes Addiren derselben Zahl.

Die Zahl, welche als Summand gesetzt werden soll, heißt Multiplikand, die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplikand genommen werden soll, Multiplikator, und das Resultat der Multiplikation wird Produkt genannt.

Das Zeichen der Multiplikation ist entweder ein $\times$ oder auch ein Punkt und wird „mal" gelesen.

Anmerkung. Ist eine der beiden Zahlen keine dekadische Zahl, so darf man das Multiplikationszeichen weglassen.

2) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Multiplikationszeichen, so hat man ein Produkt. Z. B. 4×8 ist ein Produkt, in welchem 4 der Multiplikator, 8 der Multiplikand ist.

3) Wird ein Produkt mit irgend einem Ausdrucke durch Addition oder Subtraktion verbunden, so ist es nicht gebräuchlich, das Produkt in Klammern zu setzen. (§ 3 Anmk. 2.)

§ 11.

1) Im Produkte dürfen Multiplikand und Multiplikator vertauscht werden. Zerlegt man nämlich in der Summe $3 + 3 + 3 + 3$ jeden dieser Summanden 3 in seine Einheiten und schreibt diese unter einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} 3 + 3 + 3 + 3 = {} & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Es ist nun (§ 3, 3) gleichgiltig, in welcher Ordnung die Summanden dieser Summe addirt werden; geschieht dieses aber nach den wagrechten Reihen, so erhält man, weil in jeder Reihe 4 Einheiten und drei solche Reihen vorhanden sind: $4 + 4 + 4$; es ist also $3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$ oder $4 \times 3 = 3 \times 4$, d. h. es ist gleichgiltig, welche von den beiden Zahlen des Produktes als Summand gesetzt wird, oder Multiplikand und Multiplikator können vertauscht werden, weßhalb Multiplikand und Multiplikator den gemeinschaftlichen Namen Faktoren erhalten.

2) **Mit einer Zahl wird eine Summe multiplizirt, indem man jeden Summanden mit der Zahl multiplizirt und die erhaltenen Produkte addirt**, z. B. $4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3$; die Klammer (§ 3 Anm. 2) zeigt an, daß die aus 5 und 3 bestehende Summe 4mal als Summand gesetzt werden soll; es kommt also $5 + 3$ in der erhaltenen Summe 4mal als Summand vor, mithin ist

$$4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3.$$

3) **Mit einer Zahl wird eine Differenz multiplizirt, indem man sowohl Minuend als Subtrahend mit der Zahl multiplizirt und das letzte Produkt vom ersten subtrahirt.**

$$\text{Z. B. } 3 \times (4 - 2) = 3 \times 4 - 3 \times 2.$$

$3 \times (4 - 2)$ heißt, die Differenz $4 - 2$ soll 3mal als Summand gesetzt werden: man erhält also ein Aggregat, in welchem 4 mit dem Zeichen + dreimal und 2 mit dem Zeichen — ebenfalls dreimal vorkommt, welches also (nach § 8) $= (4 + 4 + 4) - (2 + 2 + 2) = 3 \times 4 - 3 \times 2$ ist.

4) **Mit einer Zahl wird ein Produkt multiplizirt, wenn man einen Faktor mit der Zahl multiplizirt, und das erhaltene Produkt mit dem andern.**

Z. B. $6 \times (4 \times 2) = 4 \times (6 \times 2) = 4 \times 12 = 48$, denn 4×2 ist $2 + 2 + 2 + 2$; diese Summe soll aber mit 6 multiplizirt werden, dadurch erhält man (nach 2) $6 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2 = 4 \times (6 \times 2) = 4 \times 12 = 48$.

Anmerkung. Aus dem unmittelbar Vorhergehenden folgt auch, daß in einem Produkte aus mehreren Faktoren dieselben beliebig geordnet und zusammengefaßt werden dürfen.

§ 12.

1) Soll eine Zahl mit 10 multiplizirt werden, so muß jede ihrer Ziffern einen 10mal so großen Werth ausdrücken; es geht also die Einheit einer jeden Ziffer in die Einheit der nächst höhern Ordnung über; man hat demnach jede Ziffer an die nächst höhere Stelle zu rücken (Erklärung vom Dezimalsystem), was dadurch erreicht wird, daß man der Zahl rechts eine Null anhängt. Soll mit 100 multiplizirt werden, so erhält jede Ziffer einen hundertmal so großen Werth, also rückt jede Ziffer an die zweit höhere Stelle, so daß man also rechts nur zwei Nullen anzuhängen braucht u. s. f. Daraus ergibt sich folgende Regel:

Soll eine Zahl mit 10, 100, 1000 oder überhaupt mit einer Zahl, welche mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, multiplizirt werden, so hat man der zu multiplizirenden Zahl rechts so viele Nullen anzuhängen, als die Zahl hat, mit welcher multiplizirt werden soll.

Z. B. 10000 × 4735 = 47350000.

2) Ist irgend eine Zahl z. B. 432 mit einer einziffrigen (4) zu multiplizirem, so kann man 432 zerlegen in 400 + 30 + 2. Eine Summe wird aber multiplizirt (§ 11, 2), wenn man jeden Summanden multiplizirt und die erhaltenen Produkte addirt. Man hat also

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4 & \times & 2 & = & 8 \\ & 4 & \times & 30 & = & 120 \\ & 4 & \times & 400 & = & 1600 \\ \hline \text{also} & 4 & \times & 432 & = & 1728, \end{array}$$

woraus man ersieht, daß jede Ziffer von rechts nach links mit Berücksichtigung ihres Stellenwerthes multiplizirt wird, und sich folgende Regel ergibt:

Mit einer einziffrigen Zahl wird multiplizirt, wenn man mit der einziffrigen Zahl zuerst die Einer, dann die Zehner 2c. multiplizirt, und jedes Produkt an die entsprechende Stelle schreibt; ist aber eines der Produkte zweiziffrig, so werden die Zehner dieses zweiziffrigen Produktes zum nächstfolgenden Produkte addirt.

3) Wenn der Multiplikator eine einziffrige Zahl mit rechts angehängten Nullen ist wie z. B. 500 × 3427, so kann man 500 in 5 × 100 zerlegen, mit 5 × 100 wird aber (nach § 11, 4) multiplizirt, wenn man zuerst mit 5 multiplizirt, und dann das Produkt mit 100 (nach § 12, 1), indem man dem Multiplikand 2 Nullen anhängt, also 500 × 3427 = 1713500 d. h. mit einer Zahl, welche mit einer geltenden Ziffer und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, wird multiplizirt, wenn man mit der den Nullen vorausgehenden Zahl multiplizirt, und dem Produkte so viele Nullen anhängt, als der Multiplikator hat.

4) Ist auch der Multiplikator eine mehrziffrige Zahl, z. B. im Produkt 283 × 473, so kann man 283 zerlegen in 200 + 80 + 3; mit einer Summe aber wird multiplizirt (nach § 11, 1 u. 2),

wenn man mit jedem Summanden multiplizirt und die erhaltenen Produkte addirt; man hat also 473 mit 200, mit 80 und mit 3 zu multipliziren und diese Produkte, welche *Theil-* oder *Partial-Produkte* heissen, zu addiren; nun ist (nach 3)

$$\begin{array}{r} 200 \times 473 = 94600 \\ 80 \times 473 = 37840 \\ 3 \times 473 = \underline{\ \ 1419} \\ 133859 \end{array}$$

Man kann aber auch zuerst mit 3, dann mit 80 und *zu-letzt* mit 200 multipliziren und erhält dann:

$$\begin{array}{r} 3 \times 473 = \ \ 1419 \\ 80 \times 473 = 37840 \\ 200 \times 473 = \underline{94600} \\ 133859, \end{array}$$

oder drittens in ganz beliebiger Ordnung, wie zuerst mit 80, dann mit 3, und endlich mit 200, so daß man erhält:

$$\begin{array}{r} 80 \times 473 = 37840 \\ 3 \times 473 = \ \ 1419 \\ 200 \times 473 = \underline{94600} \\ 133859. \end{array}$$

Läßt man in diesen Theilprodukten die Nullen weg, so erhält man folgende Darstellungen:

283 × 473.

a)	b)	c)
946-- (2)	1419 (3)	3784- (8)
3784- (8)	3784- (8)	1419 (3)
1419 (3)	946-- (2)	946-- (2)
133859	133859	133859

Hieraus ergibt sich folgende Regel:

Mit einer mehrziffrigen Zahl wird multiplizirt, indem man mit jeder Ziffer der mehrziffrigen Zahl multiplizirt und die erhaltenen Theilprodukte untereinander schreibt, jedoch so, daß man mit jedem folgenden Theilprodukte um so viele Stellen nach rechts oder nach links rückt, als die Ziffer, durch welche das Theilprodukt erhalten wurde, rechts oder links von derjenigen steht, die das vorhergehende Theilprodukt gegeben hat, und endlich die so unter einander geschriebenen Theilprodukte addirt.

Anmerkung. Aus dem Obigen ergibt sich von selbst, was zu thun ist, wenn Multiplikatoren wie 30005 oder 47500028 gegeben sind.

5) Hat der eine oder beide Faktoren rechts angehängte Nullen, so lasse man diese während des Multiplizirens weg und hänge nach der Multiplikation dem Produkte rechts so viele Nullen an, als beide Faktoren zusammen haben.

Z. B. 584000 × 460300

	584 × 4603	
	23015	mit 5
	36824	„ 8
	18412	„ 4
=	268815200000	

V. Dividiren unbenannter Zahlen.

§ 13.

1) Dividiren heißt eine Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als eine andere Zahl Einheiten enthält, und die Größe eines solchen Theiles angeben. Die erste Zahl heißt Dividend, die andere Divisor, die gesuchte Zahl wird Quotient genannt.

Für Quotienten hat man eine doppelte Bezeichnung; entweder man schreibt links den Dividenden, rechts davon den Divisor, und zwischen beide einen Doppelpunkt (:), oder man schreibt zuerst den Dividenden, darunter den Divisor, und zwischen beide einen Strich (—). Gelesen wird: „Dividirt oder getheilt durch."

2) Vorstehender Erklärung zufolge kann also der Dividend als eine Summe von so vielen dem Quotient gleichen Summanden betrachtet werden, als der Divisor Einheiten enthält, also (nach § 10, 1) als ein Produkt, dessen einer Faktor der Divisor, dessen anderer Faktor der Quotient ist.

Daraus folgt eine zweite Erklärung, nämlich: Dividiren heißt aus einem Produkte und einem Faktor desselben den andern Faktor suchen.

3) Da der gegebene Faktor (Divisor) (nach § 11, 1) sowohl als Multiplikator als auch als Multiplikand angesehen werden kann, so folgt hieraus eine zweifache Auffassung der Division:

a) Wird der Divisor als Multiplikator betrachtet, so ist die Zahl der Theile gegeben und die Größe eines Theiles gesucht; dieß heißt Dividiren in jenem Sinne, in welchem es bisher erklärt wurde. Wird z. B. im Quotienten 12 : 4 der Divisor 4 als Multiplikator angesehen, so verlangt die Aufgabe, es soll 12 in 4 gleiche

Theile getheilt und die Größe eines solchen Theiles angegeben werden. (Umkehrung der Multiplikation.)

b) Wird aber der Divisor als Multiplikand betrachtet, so ist die Größe eines Theiles gegeben und die Anzahl der Theile gesucht, d. h. es wird gefragt: Wie oft ist der Divisor im Dividenden enthalten? Ist nämlich im obigen Beispiele 12 : 4 der Divisor 4 als Multiplikand angesehen, so ist die Frage: Wie oft kann man 4 von 12 hinwegnehmen, oder, wie oft ist 4 in 12 enthalten? (Wiederholte Subtraktion.) Die Division untersucht also hier ein Enthaltensein.

4) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Divisionszeichen, so hat man einen Quotienten, z. B. 12 : 3 = $^{12}/_{3}$ ist ein Quotient, worin 12 der Dividend, 3 der Divisor ist.

5) Wird ein Quotient, nach der zweiten Bezeichnungsweise geschrieben, mit irgend einem Ausdrucke verbunden, so schreibt man ihn nicht in Klammern. Nach der ersten Bezeichnungsweise sind sie ebenfalls überflüssig, wenn der Quotient durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation verbunden wird; (ebenso, wenn er als Dividend steht).

§ 14.

1) Ein Quotient mit seinem Divisor multiplizirt muß den Dividenden geben; denn nach der zweiten Erklärung vom Dividiren ist der Dividend ein Produkt, der Divisor und der Quotient die Faktoren desselben.

2) Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt.

Z. B. (15 + 12) : 3 = 15 : 3 + 12 : 3 = 5 + 4 = 9; denn dividirt man 15 und 12 durch 3, so erhält man 15 : 3 = 5, und 12 : 3 = 4, also ist 15 = 3 × 5, 12 = 3 × 4, mithin 15 + 12 = 3 × 5 + 3 × 4 = 3 (5 + 4), folgl. (15 + 12) : 3 = 3 (5 + 4) : 3 = 5 + 4 = 15 : 3 + 12 : 3.

3) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Minuenden und den Subtrahenden durch die Zahl dividirt und letzteren Quotienten vom ersten subtrahirt.

Z. B. (24 — 15) : 3 = 24 : 3 — 15 : 3 = 8 — 5 = 3; denn dividirt man 24 und 15 durch 3, so erhält man 24 : 3 = 8 und 15 : 3 = 5, also ist 24 = 3 × 8, 15 = 3 × 5, mithin

$24 - 15 = 3 \times 8 - 3 \times 5 = 3\,(8 - 5)$, folglich $(24 - 15) : 3 = 3\,(8 - 5) : 3 = 8 - 5 = 24 : 3 - 15 : 3$.

4) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Faktor durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multiplizirt.

Z. B. $(5 \times 21) : 7 = 5 \times (21 : 7) = 5 + 3 = 15$.

5×21 läßt sich als Summe darstellen, in welcher 5mal der Summand 21 vorkommt, man hat dann jeden Summanden durch 7 zu dividiren, also, da man 5 solche gleiche Quotienten erhält, von denen jeder $21 : 7$ ist, hat man

$$5 \times (21 : 7) = 5 \times 3 = 15.$$

5) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man entweder den Dividenden durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten durch den Divisor, oder indem man den Dividenden dividirt durch das Produkt aus der Zahl und dem Divisor. (Begründung ähnlich wie bei 4.)

6) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, indem man die Zahl durch einen Faktor des Produktes dividirt und den erhaltenen Quotienten durch den andern Faktor.

§ 15.

1) Soll eine Zahl durch 10 dividirt werden, so erhält jede Ziffer den zehnten Theil ihres früheren Werthes, es rückt also jede an die nächst niedrigere Stelle (Erklärung vom dekadischen Systeme). Dieses wird dadurch erreicht, daß man in der zu dividirenden Zahl die letzte Ziffer rechts wegstreicht; z. B. $4260 : 10 = 426$. Soll aber durch 100 dividirt werden, so erhält jede Ziffer den hundertsten Theil ihres früheren Werthes, also rückt jede an die zweit niedrigere Stelle, somit hat man im Dividenden die zwei letzten Ziffern rechts wegzustreichen u. s. f. Die durch die weggestrichenen Ziffern dargestellte Zahl nennt man Rest der Division.

Z. B. $29700 : 100 = 297$
$45000 : 1000 = 45$
$4867329 : 10000 = 486$ als Quotient mit dem Reste 7329.

Daraus folgt die Regel:

Durch 10, 100, 1000 oder überhaupt durch eine Zahl, welche mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, dividirt man, wenn von dem Dividenden rechts so viele Ziffern weggestrichen werden, als der Divisor Nullen hat.

Anmerkung. In obigem Beispiele wie in allen Fällen, in welchen sich bei der Division ein Rest ergibt, zeigt dieser Umstand an, daß der Dividend nicht ein Produkt ist, dessen einer Faktor der Divisor, dessen anderer Faktor eine (ganze) Zahl ist, sondern als eine Summe aus einem solchen Produkte und einer anderen Zahl betrachtet werden muß, welche kleiner als der Divisor ist.

2) Um eine beliebige Zahl z. B. 7944 durch eine einziffrige (3) zu dividiren, kann man 7944 zerlegen in 7000 + 900 + 40 + 4; eine Summe wird aber (nach § 14, 2) dividirt, indem man jeden Summanden dividirt;

der dritte Theil von 7 Tausend sind 2 Tausend, dabei bleibt ein Rest von 1 Tausend oder 10 Hundert, dazu den zweiten Summanden 9 Hundert addirt, gibt 19 Hundert;

der dritte Theil von 19 Hundert sind 6 Hundert, mit dem Reste 1 Hundert oder 10 Zehner, dazu 4 Zehner addirt, gibt 14 Zehner;

der dritte Theil von 14 Zehnern sind 4 Zehner mit dem Reste 2 Zehner; 2 Zehner sind gleich 20 Einern, und dazu die schon vorhandenen 4 Einer addirt, macht 24 Einer,

der dritte Theil von 24 Einern sind 8 Einer; somit hat man

$$
\begin{aligned}
7944 : 3 &= (7000 + 900 + 40 + 4) : 3 \\
&= 2000 \\
&\ \ 600 \\
&\ \ \ \ 40 \\
&\ \ \ \ \ \ 8 \\
&\ \overline{2648.}
\end{aligned}
$$

Läßt man die Nullen weg, so braucht man bloß mit jeder folgenden Ziffer des Quotienten um eine Stelle weiter nach rechts zu rücken und schreibt dann:

```
7944 : 3 = 2648
6
—
19
18
——
 14
 12
 ——
  24
  24
  ——
```

der dritte Theil von 7 ist 2, 2 × 3 gibt 6, 6 von 7 bleibt 1, die nächste Stelle 9 dazu, der dritte Theil von 19 ist 6 u. s. f.

Anmerkung. Die Produkte 6, 18, 12 und 15 schreibt man gewöhnlich nicht an.

Dasselbe Verfahren gilt auch für die Division durch eine mehrziffrige Zahl.

```
Z. B. 326352 : 523 = 624
      3138
      ----
       1255
       1046
       ----
        2092
        2092
        ----
```

3263 getheilt durch 523 gibt 6; 6 × 523 gibt 3138; es bleibt also der Rest 125, dazu kommt 5; 1255 getheilt durch 523 gibt 2, 2 × 523 ist 1046; es bleibt der Rest 209, dazu 2, 2092 getheilt durch 523 gibt 4, wobei der Rest 0 bleibt; somit ist 624 der Werth des Quotienten. Daraus folgt als Regel für die Division durch eine beliebige Zahl:

Man nehme vom Dividenden von links nach rechts ebensoviele Ziffern als der Divisor hat, — oder wenn die dadurch vorgestellte Zahl kleiner ist als der Divisor, eine mehr, — dividire diese Zahl durch den Divisor, multiplizire hierauf mit dem erhaltenen Quotienten den Divisor, subtrahire dieses Produkt, hänge an den Rest die nächste Ziffer des Dividenden, dividire wieder und fahre so lange fort, bis alle Ziffern des Dividenden in Rechnung gebracht sind.

Bei jeder einzelnen Division untersuche man zuerst, wie oft die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten des Dividenden enthalten ist mit Berücksichtigung der folgenden Ziffer des Divisors und Dividenden.

3) Hat der Divisor rechts Nullen, so läßt man sie während der Division unbeachtet, streicht aber vom Dividenden ebensoviele Ziffern rechts weg, als der Divisor Nullen hat; dem Reste werden dann die weggestrichenen Ziffern wieder zugesetzt.

Z. B. 6847(23 : 52(00 = 131 als Quotient mit dem Reste 3523

```
 52
 164
 156
  87
  52
  35
```

§ 16.

Aus § 14, 1) folgt die **Probe für die Division**; multiplizirt man den Quotienten mit dem Divisor, so muß man den Dividenden erhalten.

Aus der zweiten Erklärung vom Dividiren geht die **Probe für die Multiplikation** hervor; dividirt man das Produkt durch einen Faktor, so muß man den andern erhalten.

Anmerkung. Sind mehrere Ausdrücke theils durch Multiplikation, theils durch Division zu verbinden, so folgen die einzelnen Operationen in derselben Ordnung wie die Ausdrücke selbst auf einander, wenn nicht durch Klammern eine andere Ordnung angezeigt ist. (§ 8.)

VI. Rechnungsvortheile bei der Multiplikation und Division.

§ 17.

1) Läßt sich der Multiplikator in Faktoren zerlegen (was in § 29 weiter ausgeführt wird), mit denen bequem zu multipliziren ist, so multiplizire man zuerst mit einem Faktor und das erhaltene Produkt mit dem andern (nach § 11, 4).

Z. B. a) $63 \times 47632 \quad 63 = 9 \times 7$

428688 (mit 9)

3000816 (mit 7)

b) $4200 \times 43725, \; 4200 = 6 \times 700$

262350 (mit 6)

183645000 (mit 700).

Anmerkung. Ist in einem solchen Falle auch der Multiplikand eine Zahl, welche leicht im Gedächtnisse zu behalten ist, so schreibe man die in Mitte stehenden Ausdrücke nicht an, sondern behalte sie im Kopfe. Z. B. statt $27 \times 43 = 9 \times (3 \times 43) = 9 \times 129 = 1161$ schreibt man $27 \times 43 = 1161$.

2) Multiplizirt man (nach § 12, 4, a) zuerst mit der höchsten Ziffer des Multiplikators, so kann man das Theilprodukt von der niedrigsten Ziffer, ohne es anzuschreiben, bei der Addition der Theilprodukte gleich einzählen.

Z. B. a) 6843 × 47325
283950
378600
189300
323844975 (3 × 47325 = 141975 wurde gleich eingezählt)

b) 508 × 2406
12030
1222248

3) Hat der Multiplikator an irgend einer Stelle **1**, so kann man den Multiplikanden gleich als Theilprodukt benützen, wenn § 12, 4 c) beobachtet wird.

Z. B. a) 156 × 5924
29620
924144 (in Verbindung mit 2)

b) 721 × 2084
4168
14588
1502564

c) 24138 × 4246
16984 - (mit 4)
8492 - - („ 2)
12738 („ 3)
33968 („ 8)
102489948

d) (wieder in Verbindung mit 2)
2187 × 46039
92078 -
368312
100687293

4) Stehen im Multiplikator zwei Ziffern so neben einander, daß sie eine Zahl darstellen, mit welcher leicht multiplizirt werden kann, so multiplizire man, wie mit einer einziffrigen Zahl (nach § 12, 4, c).

Z. B. 13015 × 4356
65340 (mit 15)
56628 („ 13)
56693340

5) Mit 11 wird multiplizirt, indem man an die erste Stelle die Einer, an die nächste die Summe aus den Einern und Zeh-

nern, an die folgende die Summe aus den Zehnern und Hundertern der zu multiplizirenden Zahl u. s. w. schreibt.

$$\text{Z. B. } 11 \times 60487329 = 665360619$$

denn 11 = 10 + 1, mit einer Summe wird multiplizirt nach § 11, 2, mit 10 nach § 12, 1 also rückt 9 unter 0, 2 unter 9, 3 unter 2 u. s. f.

6) Ähnlich wie in 5) ist das Verfahren, wenn mit 111, 1111 oder überhaupt mit einer Zahl, die an jeder Stelle 1 hat, multiplizirt werden soll.

Z. B. a) 111×47632

$$\begin{array}{r}
5287152 \\
2 = 2 \\
2 + 3 = 5 \\
2 + 3 + 6 = 11 \\
1 + 3 + 6 + 7 = 17 \\
1 + 6 + 7 + 4 = 18 \\
1 + 7 + 4 \quad = 12 \\
1 + 4 \quad = 5
\end{array}$$

b) 11111×4062538

$$\begin{array}{r}
45138859718 \\
8 = 8 \\
8 + 3 = 11 \\
1 + 8 + 3 + 5 = 17 \\
1 + 8 + 3 + 5 + 2 = 19 \\
1 + 8 + 3 + 5 + 2 + 6 = 25 \\
2 + 3 + 5 + 2 + 6 + 0 = 18 \\
1 + 5 + 2 + 6 + 0 + 4 = 18 \\
1 + 2 + 6 + 0 + 4 \quad = 13 \\
1 + 6 + 0 + 4 \quad = 11 \\
1 + 0 + 4 \quad = 5 \\
4 \quad = 4
\end{array}$$

7) Mit 101, 1001, 10001, oder mit einer andern Zahl, von welcher die erste und letzte Ziffer 1 ist, die dazwischenliegenden Nullen sind, wird multiplizirt, indem man der zu multiplizirenden Zahl so viele Nullen anhängt, als der Multiplikator Ziffern hat, weniger eine, und dazu die zu multiplizirende Zahl addirt. Die anzuhängenden Nullen kann man durch Punkte anzeigen, dann ist es nicht nothwendig, die ursprüngliche Zahl als Theilprodukt anzuschreiben.

Z. B. a) $101 \times 6823..$

$$689123$$

denn 101 × 6823 = (100 + 1) × 6823
100 × 6823 = 682300
1 × 6823 = 6823
689123

b) 100001 × 720584.....
72059120584

8) Ähnlich wie bei 7) kann mit 9, 99, 999 u. s. f. d. h. mit jeder Zahl multiplizirt werden, die mit lauter Neunern geschrieben ist, nur muß man die zu multiplizirende Zahl nicht addiren, sondern subtrahiren.

Z. B. a) 9 × 4732.
42588

2 von 10 bleiben 8
3 „ 11 „ 8
7 „ 12 „ 5
4 „ 6 „ 2
0 „ 4 „ 4

denn 9 × 4732 = 4732 × (10 — 1)
10 × 4732 = 47320
-1 × 4732 = -4732
42588

b) 99 × 30574..
3026826

4 von 10 bleiben 6
7 „ 9 „ 2
5 „ 13 „ 8
0 „ 6 „ 6
3 „ 5 „ 2
0 „ 0 bleibt 0
0 „ 3 bleiben 3

denn 99 × 30574 = (100 — 1) × 30574
„ 100 × 30574 = 3057400
„ —1 × 30574 = —30574
3026826

c) 99999 × 47098524.....
4709805301476

4 von 10 bleiben 6
2 „ 9 „ 7
5 „ 9 „ 4
8 „ 9 bleibt 1
9 „ 9 „ 0
0 „ 3 bleiben 3

7 von 12 bleiben 5
4 „ 4 bleibt 0
0 „ 8 bleiben 8
0 „ 9 „ 9
0 „ 0 bleibt 0
0 „ 7 bleiben 7
0 „ 4 „ 4

denn 99999 × 47098524 = (100000 — 1) × 47098524
100000 × 47098524 = 4709852400000
— 1 × 47098524 = —47098524
4709805301476

9) Hat der Multiplikator an allen Stellen mit Ausnahme der niedrigsten Stelle die Ziffer 9, so kann man mit der nächsten höhern Zahl, die mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird, multipliziren, und von dem erhaltenen Produkte den so vielfachen Multiplikand subtrahiren, als diejenige Zahl Einheiten hat, welche den Multiplikator zu der nächsten höhern Zahl ergänzt, welche mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird.

Z. B. a) 994 × 497352...
494367888

denn 994 × 497352 = (1000 — 6) × 497352
1000 × 497352 = 497352000
—6 × 497352 = —2984112
494367888

b) 99998 × 407324.....
40731585352

denn 99998 × 407324 = (100000 — 2) × 407324
100000 × 407324 = 40732400000
—2 × 407324 = —814648
40731585352

10) Mit 25 kann eine Zahl multiplizirt werden, indem man der Zahl zwei Nullen anhängt, und sie dann durch 4 dividirt; denn 25 ist der vierte Theil von Hundert; multiplizirt man also mit Hundert, indem man 2 Nullen anhängt, so ist das Produkt das vierfache des gesuchten, man muß daher noch durch 4 dividiren.

Z. B. a) 25 × 762435
= 19060875

4 in 7 ist 1 mal enthalten, bleibt 3 als Rest
„ „ 36 „ 9 „ „ „ 0 „ „
„ „ 2 „ 0 „ „ „ 2 „ „

4 in 24 ist 6 mal enthalten, bleibt 0 als Rest
" " 3 " 0 " " " 3 " "
" " 35 " 8 " " " 3 " "
" " 30 " 7 " " " 2 " "
" " 20 " 5 " " " 0 " "

b) 25 × 380519915
9512997875

11) Mit 125 kann multiplizirt werden, wenn man der zu multiplizirenden Zahl rechts drei Nullen anhängt, und sie dann durch 8 dividirt; denn 125 = 1000 : 8

Z. B. 125 × 6984735
=873091875

12) Mit 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 kann multiplizirt werden, indem man mit 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 multiplizirt, und von dem erhaltenen Produkte den zehnten Theil desselben subtrahirt. Denn es ist z. B. 54 = 60 — 6, 6 ist aber der zehnte Theil von 60, also wird mit 60 multiplizirt und der zehnte Theil davon subtrahirt.

Z. B. a) 72 × 47395
[3791600 (mit 80)]
= 3412440

b) 45 × 40369983
[2018499150 (mit 50)]
= 1816649235

Dasselbe Verfahren kann auch bei der Multiplication mit 180, 270, 360, 450 u. s. f. angewendet werden.

Z. B. 810 × 2907534 (810 = 900 — 90)
[2616780600 (mit 900)]
2355102540

Anmerkung. Ähnliche Abkürzungen können auch bei andern Multiplikatoren angewendet werden, wie bei 15, 50, 75, 499, 5999 2c.

13) Durch 25 kann eine Zahl dividirt werden, wenn man die Zahl mit 4 multiplizirt und die letzten zwei Ziffern wegstreicht. Denn 25 ist der vierte Theil von 100 2c.

Z. B. 2793575 : 25
= 111743

14) Durch 125 kann dividirt werden, wenn man den Dividenden mit 8 multiplizirt, und die drei letzten Ziffern wegstreicht.

Z. B. 232375 : 125
= 1859

15) Die Division kann auch dadurch abgekürzt werden, daß man die Theilprodukte nicht anschreibt, sondern sogleich, wenn eine Stelle des Divisors multiplizirt ist, das Produkt von der entsprechenden Stelle des Dividenden subtrahirt.

Z. B. a) 7944 : 3 =2648 (§ 15, 2) Anm.)
19
14
24

b) 28247776 : 49732 = 568
338177
397856

49 ist in 282 (§ 15, 2) Ende) fünfmal enthalten. 5 × 2 gibt 10, 10 von 17 bleiben 7. 5 × 3 gibt 15 und 1 sind 16, 16 von 17 bleibt 1. 5 × 7 gibt 35 und 1 sind 36, 36 von 44 bleiben 8. 5 × 9 gibt 45 und 4 sind 49, 49 von 52 bleiben 3. 5 × 4 sind 20 und 5 sind 25, 25 von 28 bleiben 3 u. s. f.

Zweite Abtheilung.

Das Rechnen mit benannten Zahlen.

I. Erklärungen.

§ 18.

Es gibt benannte Zahlen derselben Art, die jedoch mit verschiedenen Benennungen versehen werden; z. B. Zentner, Pfund, Gramm; Gulden, Kreuzer, Pfennige; Dekameter, Meter, Decimeter u. s. f. Solche Zahlen heissen mehrfach benannte Zahlen.

Man unterscheidet hier wieder Einheiten von verschiedenen Ordnungen, z. B. ein Pfund heißt in Bezug auf ein Gramm eine Einheit höherer Ordnung, das Gramm eine Einheit niedrigerer Ordnung, weil zu einem Pfund 500 Gramm nothwendig sind. 60 Kreuzer geben einen Gulden; Kreuzer sind daher Einheiten niedrigerer Ordnung, Gulden Einheiten höherer Ordnung u. s. f.

Daraus ergibt sich zunächst die doppelte Aufgabe:

a) Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung und b) Einheiten niedrigerer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung zu verwandeln.

Diese doppelte Aufgabe heißt Reduziren. Die Zahl, die anzeigt, wie viele Einheiten niedrigerer Ordnung zu einer Einheit höherer Ordnung gehören, heißt Reduktionszahl.

II. Das Reduziren.

A) Verwandlung von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung (Resolviren).

§ 19.

1) Sollen z. B. 5 ℔ in Gramm verwandelt werden, so muß man mit der Reduktionszahl 500 multipliciren, denn 1 ℔ hat 500 Gramm, also 5 ℔ 5mal so viel, somit

5 ℔ = 5 × 500 Gramm = 2500 Gramm.

Es werden demnach Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung verwandelt, wenn man mit der Reduktionszahl multiplizirt.

2) Hat man aber Einheiten von verschiedenen Ordnungen, z. B. 4 Gulden 26 Kreuzer und 3 Pfennige, in Einheiten der niedrigsten Ordnung (also in Pfennige) zu verwandeln, so verwandle man die Einheiten der höchsten Ordnung in die der nächst niedrigeren, addire dazu die gegebenen Einheiten dieser Ordnung, verwandle diese Summe in Einheiten der folgenden Ordnung u. s. f. bis man Einheiten der niedrigsten Ordnung hat, also

4 fl. 26 kr. 3 dl. = 1067 dl.

$$
\begin{array}{l}
4 \times 60 = 240 \\
\qquad\quad\ \underline{\ \ 26} \\
\qquad\quad\ 266 \times 4 = 1064 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{\quad\ 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ 1067
\end{array}
$$

Aufgabe. Wie viele Bogen geben 3 Ballen, 4 Rieß, 19 Buch, 15 Bogen Schreibpapier?

3 Ballen, 4 Rieß, 19 Buch, 15 Bogen = 16791 Bogen.

$$
\begin{array}{l}
3 \times 10 = 30 \\
\qquad\quad\ \underline{\ \ 4} \\
\qquad\quad\ 34 \times 20 = 680 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{\ \ 19} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ 699 \times 24 = 16776 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{\quad\ 15} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 16791
\end{array}
$$

3) Ist die Reduktionszahl 10, so hat man nur die Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung rechts neben die der höhern zu setzen; fehlen die Einheiten irgend einer Ordnung, so ersetze man die entsprechende Stelle durch eine Null. Ebenso, wenn die Reduktionszahl 100 oder 1000 ist, nur werden durch die nächst niedrigeren Einheiten bei 100 die folgenden zwei Stellen, bei 1000 die folgenden drei Stellen eingenommen.

Z. B. a) 5 Ballen = 50 Rieß.
b) 14 Centner = 1400 Pfund.
c) 4m 3dm 7cm 2mm = 4372mm.
d) 15□m 57□dm 89□cm = 155789□cm.
e) 12Cm 315Cdm 177 Ccm = 12315177 Ccm.
f) 9m 6cm = 906cm.
g) 12□m 24□cm 7□mm = 12002407□mm.
h) 124Cm 33Cdm 2Cmm = 124033000002 Cmm.

B) Verwandlung von Einheiten niedrigerer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung (Reduziren im engeren Sinne).

§ 20.

1) Wie viele Wochen geben 6209 Tage?

Zu einer Woche gehören 7 Tage, so oft also die Zahl 7 in 6209 enthalten ist, so viele Wochen erhält man, also hat man:

6209 Tage = 6209 : 7 Wochen = 887 Wochen.

Bleibt bei dieser Division ein Rest, so drückt derselbe Einheiten der gegebenen Ordnung aus.

Man hat daher die Regel:

Einheiten einer niedrigeren Ordnung werden in Einheiten der nächst höhern Ordnung verwandelt, wenn man durch die Reduktionszahl dividirt. Durch den Quotienten erhält man die Einheiten der verlangten Ordnung, der Rest stellt Einheiten der gegebenen Ordnung vor.

2) Wie viele Ballen, Rieß, Buch und Bogen geben 41649 Bogen Druckpapier? Nach 1) sind:

41659 Bogen = 41659 : 25 Buch = 1666 Buch 9 Bogen
1666 Buch = 1666 : 20 Rieß = 83 Rieß 6 Buch
83 Rieß = 83 : 10 Ballen = 8 Ballen 3 Rieß,

folglich sind 41659 Bogen Druckpapier = 8 Ballen 3 Rieß 6 Buch und 9 Bogen.

Einheiten niedrigerer Ordnung werden in Einheiten höherer Ordnung verwandelt, indem man sie zuerst in Einheiten der nächst höhern Ordnung, diese wieder in solche der folgenden Ordnung u. s. w. bis zur höchsten Ordnung verwandelt.

Aufgabe. Wie viele Gulden, Kreuzer, Pfennige geben 549 Pfennige?

549 Pfennige = 2 Gulden, 17 Kreuzer, 1 Pfennig.

549 : 4 gibt 137
1 Pfennig,
137 : 60 gibt 2 Gulden,
17 Kreuzer.

3) Ist die Reduktionszahl 10, 100, 1000 ꝛc., so hat man nur die gegebene Zahl von rechts nach links in Klassen von je so vielen Ziffern einzutheilen, als Reduktionszahl Nullen hat; die einzelnen Klassen geben dann die Einheiten der verschiedenen Ordnungen.

Z. B. a) 576 ℔ = 5 Ztr. 76 ℔.
b) 4|7|3|5 mm = 4m 7dm 3cm 5mm.
c) 29|45|32□mm = 29□dm 45□cm 32□mm.
d) 79|352|845Ccm = 79Cm 352Cdm 845Ccm.
e) 20|4|0|3mm = 20m 4dm 3mm.
f) 2|40|00|20□mm = 2□m 40 □dm 20□mm.
g) 90|000|032Ccm = 90Cm 32Ccm.

III. Addiren benannter Zahlen.

§ 21.

1) Haben die Summanden bloß Einheiten derselben Ordnung, so addire man dieselben und gebe der Summe die gemeinschaftliche Benennung.

Z. B. 2346□m + 7983□m = 10329□m.

2) Enthalten die Summanden Einheiten von verschiedenen Ordnungen, so addire man zuerst die Einheiten der niedrigsten Ordnung, reduzire die erhaltene Summe, addire den dadurch erhaltenen Quotienten zu den gegebenen Einheiten der nächst höheren Ordnung, und fahre so fort, bis Alles addirt ist.

Z. B. Ein Kaufmann erhielt drei Sendungen Waaren; die erste betrug 10 Tonnen, 1 Zentner, 37 Pfund, 2 Gramm; die zweite 7 Tonnen, 1 Zentner, 15 Pfund, 3 Gramm, und die dritte 8 Tonnen, 57 Pfund, 3 Gramm; wie viel erhielt er im Ganzen?

	10	Tonnen	1	Zentner	37	Pfund	2	Gramm
	7	"	1	"	15	"	3	"
	8	"	—	"	57	"	3	"
Er erhielt	25	Tonnen	3	Zentner	9	Pfund	8	Gramm.

IV. Subtrahiren benannter Zahlen.

§ 22.

1) Beim Subtrahiren von Einheiten derselben Ordnung erhält die Differenz die nämliche Benennung wie der Minuend und der Subtrahend.

Z. B. Ein Bauer hat 65 Hektar an Aeckern und Wiesen, die Wiesen betragen 23 Hektar; wie viel betragen die Aecker?

Die Aecker betragen 65 Hektar — 23 Hektar = 42 Hektar.

2) Hat man Einheiten von verschiedenen Ordnungen zu subtrahiren, so beginnt man bei den Einheiten der niedrigsten Ordnung. Ist irgend eine Zahl des Minuenden kleiner als die entsprechende des Subtrahenden, so nehme man vor Ausführung der Subtraktion eine Einheit der nächst höheren Ordnung, resolvire diese auf gegebene Ordnung und addire den Minuenden der gegebenen Ordnung dazu.

Z. B. Ein Kaufmann erhielt eine Sendung Zucker und zwar 24 Ztr. 36 ℔ 17 Gramm Brutto-Gewicht; das Tara-Gewicht beträgt 27 ℔ 30 Gramm; wie viel erhielt er Netto?

	24	Ztr.	36	℔	17	Gramm.
	—	"	27	℔	30	"
Er erhielt Netto:	24	Ztr.	8	℔	487	Gramm.

V. Zeitrechnungen durch Addition und Subtraktion.

§ 23.

1) Bei Zeitrechnungen bringt man gewöhnlich diejenige Zeit in Rechnung, welche schon verflossen ist. So z. B. für den 6. März 1864 hat man 1863 Jahre 2 Monate und 5 Tage in Rechnung zu bringen; denn schreibt man 1864, so sind erst 1863 Jahre vorüber 2c. 2c. Hat man umgekehrt durch Rechnung die schon verflossene Zeit von 1860 Jahren, 3 Monaten und 9 Tagen gefunden, so schreibt man dafür den 10. April des Jahres 1861. Denn nachdem 1860 Jahre vorüber waren, schrieb man 1861, nach 3 verflossenen Monaten des Jahres hat man den April, und nach 9 Tagen den 10. des Monats.

2) Die Zeitrechnungen, welche durch Addition oder Subtraktion gelöst werden können, zerfallen in drei Arten; es kann nämlich gesucht werden:

a) das Ende einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, wenn man die Dauer zum Anfange addirt.

Z. B. König Maximilian II. von Bayern wurde den 28. November 1811 geboren, und starb in einem Alter von 52 Jahren, 3 Monaten und 12 Tagen. Wann war dieses?

1810 Jahre	10 Monate	27 Tage
52 „	3 „	12 „
1863 Jahre	2 Monate	9 Tage,

das war also den 10. März 1864;

b) die Dauer einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, indem man den Anfang vom Ende subtrahirt.

Z. B. Ludwig der Bayer gelangte auf den deutschen Kaiserthron den 20. Oktober 1314, und starb den 11. Oktober 1347. Wie lange regierte er?

1346 Jahre	9 Monate	10 Tage
1313 „	9 „	19 „
32 Jahre	11 Monate	21 Tage,

demnach regierte er 32 Jahre, 11 Monate und 21 Tage;

c) der Anfang einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, wenn man die Dauer vom Ende subtrahirt.

Z. B. Schiller starb am 9. Mai 1805 in einem Alter von 45 Jahren, 5 Monaten und 29 Tagen. Wann war er geboren?

1804 Jahre	4 Monate	8 Tage
45 „	5 „	29 „
1758 Jahre	10 Monate	9 Tage;

Schiller wurde den 10. November 1759 geboren.

Anmerkung. Bei diesen Zeitrechnungen bringen die Einen bei Monaten eben so viele Tage in Rechnung, als der betreffende Monat wirklich hat, wobei jedoch immer mit vollendeter Zeit gerechnet werden muß, während andere jeden Monat zu 30 Tagen annehmen. Bei geschäftlichen Rechnungen aber wird der Monat fast immer zu 30 Tagen angenommen.

VI. Multipliziren benannter Zahlen.

§ 24.

1) Bei dem Multipliziren kann nach dem Begriffe des Multiplizirens bloß der Multiplikand eine benannte Zahl sein; das Produkt ist dann gleichbenannt mit dem Multiplikanden.

Es sei die Aufgabe gegeben: Ein Arbeiter verdient sich in einem Tage 4 Mk., wie viel verdient er sich in 6 Tagen? In 6 Tagen wird er sich 6mal so viel verdienen, als in einem Tage, (also ist der Multiplikator unbenannt), daher beträgt der Verdienst in 6 Tagen

$$6 \times 4 \text{ Mk.} = 24 \text{ Mk.}$$

2) Hat der Multiplikand Einheiten von verschiedenen Ordnungen, so multiplizire man die Einheiten einer jeden Ordnung, indem man mit jenen der niedrigsten Ordnung beginnt, das Produkt reduzirt, und die erhaltenen höheren Einheiten zu dem nächsten Produkte addirt, hierauf wieder reduzirt, und so fortfährt, bis der ganze Multiplikand multiplizirt ist.

Z. B. Jemand braucht in jedem Monate 32 fl. 36 kr. 3 dl.; wie viel braucht er in einem Jahre?

32 fl. 36 kr. 3 dl. × 12 = 391 fl. 21 kr.

12 × 3 dl. = 36 dl. = 9 kr.
12 × 36 kr. = 432 kr.
441 kr. = 7 fl. 21 kr.
12 × 32 fl. = 384 fl. —

Er braucht daher in einem Jahre: 391 fl. 21 kr.

3) Ist die Reduktionszahl 10, 100 ꝛc., so rechnet man am einfachsten, wenn man Alles auf Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung resolvirt, hierauf multiplizirt und dann wieder reduzirt.

Z. B. Ein Wagenrad hat einen Umfang von 2m 3dm 2cm; welchen Weg hat es nach 12 Umdrehungen zurückgelegt?

2m 3dm 2cm = 232cm

12 × 232cm = 2784cm

2784cm = 2Dm 7m 8dm 4cm = 27m 84cm,

also hat das Rad 27m 84cm zurückgelegt.

VII. Dividiren benannter Zahlen.

§ 25.

1) Beim Dividiren mit benannten Zahlen sind zwei Fälle zu unterscheiden, welche am leichtesten aus der Betrachtung der folgenden Aufgaben erkannt werden.

a) Es sei die Aufgabe gegeben:

Vier Hektoliter Wein kosten 120 Mk., was kostet Ein Hektoliter?

Jeder Hektoliter kostet gleich viel, also jeder Hektoliter den vierten Theil von dem, was alle vier Hektoliter zusammen kosten. Deßwegen sind 120 Mk. (nach § 13, 3, a) in vier gleiche Theile zu theilen, und man hat:

120 Mk. : 4 = 30 Mk.;

es kostet demnach ein Hektoliter 30 Mk.

Oder: Zwölf Arbeiter verdienen sich bei gleicher Leistung des Einzelnen 96 Mark; wie viel trifft auf jeden?

Jeder der zwölf Arbeiter verdient gleich viel, daher sind die 96 Mark in zwölf gleiche Theile zu theilen und man erhält:

96 Mark : 12 = 8 Mark;

somit treffen auf jeden Arbeiter 8 Mark.

In diesen beiden Aufgaben ist der Dividend eine benannte, der Divisor eine unbenannte Zahl, und der Quotient gleich benannt mit dem Dividend.

b) Hat man aber Aufgaben, wie die folgenden:

78 Mark wurden unter mehrere Personen so vertheilt, daß jede 3 Mark erhielt; wie viele Personen waren es? — so

soll (nach § 13, 3, b) die Anzahl der gleichen Theile gesucht werden, unter der Bedingung, daß ein Theil 3 Mk. beträgt, und es frägt sich: Wie oft sind 3 Mk. in 78 Mk. enthalten? Man hat nun

78 Mk. : 3 Mk. = 26

es waren also 26 Personen.

Oder: Ein Meter Tuch kostet 6 Mark, wie viele erhält man für 54 Mark?

So oft 6 Mark in 54 Mark enthalten sind, so oft erhält man einen Meter, daher hat man

54 Mark : 6 Mark = 9

man erhält daher 9 Meter.

Hier sind Dividend und Divisor gleichbenannte Zahlen und der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

Im ersten Falle wurde der Multiplikand, im zweiten der Multiplikator gesucht.

2) Hat der Dividend Einheiten von verschiedenen Ordnungen, so dividirt man zuerst die Einheiten der höchsten Ordnung, verwandelt den Rest in Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung, addirt die gegebenen dazu, dividirt wieder und fährt so fort, bis Alles in Rechnung gebracht ist.

Z. B. Eine Brunnenröhre liefert in einem Tage 27 Hektoliter, 6 Liter. Wie viel liefert sie in einer Stunde?

27 Hektoliter 6 Liter : 24 = 1 Hektoliter 12 Liter 3 Viertelsliter.

(1)
27 : 24
3 × 100 = 300
6 (12)
306 : 24
18 × 4 = 72 (3)
72 : 24.

3) Enthalten Dividend und Divisor Einheiten verschiedener Ordnungen, so verwandle man Alles in Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung, und dividire hierauf.

Z. B. 1 Pfund Kaffe kostet 2 Mk. 3 Pf., wie viel erhält man für 101 Mk. 50 Pf.?

101 Mk. 50 Pf. : 2 Mk. 3 Pf.
101 Mk. 50 Pf. = 10150 Pf.
2 Mk. 3 Pf. = 203 Pf.
also 10150 : 203 = 50
man erhält somit 50 ℔.

VIII. Berechnungen von Flächen und Körpern.

§ 26.

Soll die Größe einer Fläche oder eines Körpers bestimmt werden, so ist im ersten Falle zu untersuchen, wie oft eine Fläche von gegebener Größe in der zu bestimmenden Fläche — im zweiten Falle, wie oft ein Körper von gegebener Größe in dem zu bestimmenden Körper enthalten ist. Es können also als Maße für Flächen nur Flächen, und als Maße für Körper nur Körper benützt werden. Hiezu gebraucht man für Flächen ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, und welches dem entsprechend benannt wird (Quadratmeile, Quadratkilometer, Quadrathektometer, Quadratdekameter ꝛc.) — für Körper einen Würfel, dessen Seite wiederum die Längeneinheit ist (Kubikmeile, Kubikkilometer, Kubikhektometer ꝛc.).

Anmerkung. Das Quadrathektometer heißt Hektar, das Quadratdekameter Ar.

Die Berechnung ist am leichtesten aus folgenden Beispielen ersichtlich.

1) Eine rechteckige Wand hat eine Höhe von 4m und eine Breite von 5m. Wie groß ist die Fläche dieser Wand?

Denkt man sich die mit der Höhe gleichlaufenden Seiten in Meter abgetheilt, und die einander entsprechenden Theilungspunkte durch gerade Linien verbunden, so erhält man so viele Streifen, als die Höhe Meter enthält (in unserm Falle vier); werden die mit der Breite gleichlaufenden Seiten ebenso abgetheilt, und die Theilungspunkte wieder durch Gerade verbunden, so wird dadurch jeder von den erwähnten Streifen in Rechtecke getheilt, wovon jedes einen Meter lang und ebenso breit, also ein Quadratmeter ist. Man erhält aber aus jedem Streifen so viele Rechtecke, als die Breite Meter enthält (hier fünf), und es

enthält daher in unserm Falle die ganze Fläche, da vier Streifen vorhanden sind und jeder Streifen die Größe von fünf Quadrat-Meter hat,

$$4 \times 5 \,\square\text{m} = 20 \,\square\text{m}.$$

Man findet demnach die Anzahl der Flächeneinheiten für ein Rechteck, wenn man die Zahl der Längeneinheiten, welche die Höhe enthält, mit der Anzahl der Einheiten, welche der Breite zukommen, multiplizirt.

2) Sind Länge und Breite durch Einheiten verschiedener Ordnungen ausgedrückt, so resolvire man dieselben zuerst auf Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung.

Z. B. a) Eine rechteckige Tischplatte hat eine Länge von 9dm 4cm 2mm, und eine Breite von 6dm 5cm; welche Fläche hat dieselbe?

Die Fläche eines Rechteckes wird gefunden, wenn man die Längezahl mit der Breitezahl multiplizirt.

Die Länge = 9dm 4cm 2mm = 942mm
Die Breite = 6dm 5cm = 650mm

somit Fläche = 942 × 650 □mm = 612300 □mm = 61 □dm 23 □cm.

b) Die Länge eines rechteckigen Ackers beträgt 4 Hm. 5 Dm. 6m., die Breite desselben 1 Hm. 8 Dm. 7m., wie viele Hektar, Ar und Quadratmeter hält dieser Acker?

Länge = 456m. Breite = 187m.

Fläche des Ackers = 456 × 187 □m = 85272 □m = 8 Hektar 52 Ar und 72 □m.; also beträgt die Fläche des Ackers 8 Hektar 52 Ar und 72 □m.

3) Eine rechteckige Fläche mißt 36 □m, ihre Länge 9m; wie groß ist die Breite?

Ist eine Fläche 9m lang, so muß sie 1m breit sein, um 9 □m zu messen. So oft also in der gegebenen Fläche 9 □m enthalten sind, so viele Meter muß ihre Breite enthalten. Es ist aber:

$$36 : 9 = 4$$

daher ist die Fläche 4m breit.

Wenn eine rechteckige Fläche und eine ihrer Ausdehnungen gegeben sind, so findet man die andere Ausdehnung, indem man die Zahl der Flächen-

einheiten durch die Zahl der Längeneinheiten der gegebenen Ausdehnung dividirt.

Z. B. Ein Kupferstich hat eine Fläche von 4□dm 2□cm 48□mm und eine Höhe von 2dm 3cm 4mm. Wie breit ist derselbe?

Hier muß man zuerst die Fläche und die Höhe durch Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung ausdrücken, d. h. die Fläche durch □mm, die Höhe durch Millimeter, und erhält dann:

4□dm 2□cm 48□mm = 40248□mm 2dm 3cm 4mm = 234mm

40248 : 234 = 172
1684
468

Die Breite beträgt demnach 172mm = 1dm 7cm 2mm.

4) Ein rechteckiger Marmorblock ist 3m lang 2m breit und 4m hoch, wie viele Kubikmeter enthält derselbe?

Man denke sich eine Begrenzungsfläche, z. B. eine von jenen beiden, welche durch die Länge und Breite des Steines bedingt sind (ebenso wie in 1), in □m abgetheilt, so erhält man (nach 1)

3 × 2 □m.

Denkt man sich hierauf die Höhe des Steines in Meter abgetheilt, und durch jeden Theilungspunkt, gleichlaufend mit der eben betrachteten Begrenzungsfläche, eine Ebene gelegt, ebenso durch jede von den Geraden, welche die zuerst erwähnte Begrenzungsfläche in Quadrate theilen, eine mit einer anderen Begrenzungsfläche gleichlaufende Ebene, so theilen die Ebenen, welche durch die Theilungspunkte der Höhe gehen, den Block in so viele Schichten, als die Höhe Meter enthält, in jeder dieser Schichten sind aber so viele Kubikmeter als die zuerst erwähnte Begrenzungsfläche Quadratmeter hat; somit enthält der Block

4 × (3 × 2) Cm = 24 Cm.

Man findet den Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers, wenn man die Zahl der Längeeinheiten mit der Zahl der Breiteeinheiten und das erhaltene Produkt mit jener Zahl multiplizirt, welche die Einheiten der Höhe ausdrückt.

5) Sind die Ausdehnungen durch Einheiten verschiedener Ordnungen ausgedrückt, so resolvire man dieselben zuerst auf Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung.

Z. B. Ein Kistchen hat im Lichten eine Länge von 6dm 4cm, eine Breite von 2dm 5cm und eine Höhe von 3dm 9cm; welchen Kubikinhalt hat dieses Kistchen?

Länge = 6dm 4cm = 64 cm
Breite = 2dm 5cm = 25 cm
Höhe = 3dm 9cm = 39 cm
Kubikinhalt = 64 × 25 × 39 Ccm = 62400 Ccm = 62 Cdm und 400 Ccm.

Der körperliche Inhalt des Kistchens ist also = 62 Cdm. 400 Ccm.

6) Sind der Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers und zwei Ausdehnungen desselben gegeben, und es soll die dritte Ausdehnung gesucht werden, so wird diese erhalten, wenn man die Zahl, welche den Kubikinhalt ausdrückt, durch das Produkt der Zahlen, welche den beiden gegebenen Ausdehnungen entsprechen, dividirt. (Erklärung wie bei 3.)

Beispiele. a) Ein rechteckiger Körper hat 385Cm Inhalt, 7m Länge und 5m Breite, wie hoch ist derselbe?

385 : (7 × 5) = 11;

der Körper ist 11m hoch.

b) Eine Kammer hat einen Kubikinhalt von 40Cm 20Cdm, die Länge derselben beträgt 4m 6dm, die Breite 3m. Wie hoch ist sie?

Man hat 40Cm 20Cdm = 40020Cdm
4m 6dm = 46dm
3m = 30dm
mithin 40020 : (46 × 30) = 40020 : 1386 = 29;
die Höhe der Kammer beträgt 29dm = 2m 9dm.

7) Sind der Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers und eine Kante desselben gegeben, so erhält man die Größe einer jeden der zwei Grenzflächen, in welcher weder die gegebene Kante, noch eine ihr gleichlaufende liegt, indem man die Zahl, welche den Kubikinhalt ausdrückt, durch die Zahl, welche der Kante entspricht, dividirt.

Z. B. Eine rechteckige Braupfanne, deren Höhe 2m 56cm beträgt, hält 40 Cm, wie groß ist ihre Bodenfläche?

40 Cm = 40000000 Ccm
2 m 56 cm = 256 cm
40000000 : 256 = 156250

Die Bodenfläche hält 156250 □cm = 15 □m 6250 □cm.

Dritte Abtheilung.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

I. Erklärungen.

§ 27.

1) Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn diese in der ersteren ohne Rest enthalten ist. Z. B. in 21 ist 7 ohne Rest enthalten, also ist 21 durch 7 theilbar. Der Dividend heißt ein Vielfaches des Divisors, der Divisor aber Theiler oder Maß des Dividenden. Im obigen Beispiel ist also 21 ein Vielfaches von 7, und 7 ein Maß oder Theiler von 21.

2) Jede Zahl ist durch 1 und sich selbst theilbar. Diejenigen Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst theilbar sind, heissen einfache Zahlen oder Primzahlen, die übrigen heissen zusammengesetzte Zahlen.

Z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 sind einfache Zahlen.
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 sind zusammengesetzte Zahlen.

3) Sind zwei oder mehrere Zahlen durch dieselbe Zahl theilbar, so heißt diese gemeinschaftliches Maaß, gemeinschaftlicher Faktor, Theiler oder Divisor dieser Zahlen, z. B. 24, 36 und 60 haben die gemeinschaftlichen Maße 2, 3, 4, 6, 12; 12 ist aber das größte dieser Maße, deßhalb heißt diese Zahl das größte gemeinschaftliche Maß (Faktor, Theiler oder Divisor).

4) Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar ist, heißt gemeinschaftliches Vielfaches oder gemeinschaftlicher Dividend dieser Zahlen, z. B. 30 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 5, 6, 15, weil 30 durch jede dieser Zahlen theilbar ist; 60, 90, 120 sind ebenfalls gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen, 30 ist aber die kleinste davon, deß-

halb heißt diese Zahl das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Zahlen, von welchen je zwei außer 1 kein gemeinschaftliches Maß haben, heissen relativ prime Zahlen (Primzahlen unter sich), z. B. 8, 25 und 27 sind relativ prime Zahlen, denn sie haben kein gemeinschaftliches Maß.

II. Sätze über die Theilbarkeit.

§ 28.

1) Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch ihre Summe durch dasselbe theilbar sein, z. B. 14 und 21 haben das gemeinschaftliche Maß 7, also ist auch $14 + 21$ d. i. 35 durch 7 theilbar, denn nach § 14, 2) ist $(14 + 21) : 7 = 14 : 7 + 21 : 7$, es ist aber 7 sowohl in 14 als in 21 ohne Rest enthalten, mithin auch in der Summe 14 und 21, d. i. in 35.

2) Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch die Differenz dieser Zahlen durch dasselbe theilbar sein, z.B. 25 und 10 haben das gemeinschaftliche Maß 5, also ist auch $25 — 10$ d. i. 15 durch 5 theilbar; denn nach § 14, 3) ist $(25—10) : 5 = 25 : 5 — 10 : 5$, es ist aber 5 sowohl in 25 als in 10 ohne Rest enthalten, mithin auch in der Differenz $25 — 10$, d. i. in 15.

3) Ist eine Zahl durch die andere theilbar, so ist auch jedes Vielfache dieser Zahl durch dieselbe theilbar, z. B. 33 ist durch 11 theilbar, also ist auch 33×7, d. i. 231 durch 11 theilbar; denn nach § 14, 4) ist $(33 \times 7) : 11 = (33 : 11) \times 7$, in 33 ist 11 ohne Rest enthalten, also auch in 33×7 d. i. in 231.

4) Ist eine Zahl durch zwei oder mehrere relative Primzahlen theilbar, so ist sie auch durch das Produkt derselben theilbar.

III. Kennzeichen der Theilbarkeit und Aufsuchen der Theiler einer Zahl.

§ 29.

1) Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer (§ 2) durch 2 theilbar ist. Z. B. 3754 ist durch 2 theilbar, weil die letzte Ziffer 4 durch 2 theilbar ist. Denn schreibt man die Zahl dekadisch an, so erhält man:

$$3754 = 3000 + 700 + 50 + 4;$$

soll diese Summe durch 2 theilbar sein, so muß jeder Summand durch 2 theilbar sein; da nun aber alle Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc. durch 2 theilbar sind, so hängt die Theilbarkeit nur vom letzten Summanden d. i. von der letzten Ziffer der Zahl ab.

Ist eine Zahl durch 2 theilbar, so heißt sie eine gerade, ausserdem eine ungerade.

2) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn die Quersumme durch 3 oder 9 theilbar ist. Z. B. Die Quersumme von 47358, nämlich $4 + 7 + 3 + 5 + 8 = 27$, ist durch 3 und 9 theilbar, also die Zahl selbst durch 3 und 9 theilbar. Denn es ist:

$$47358 = 40000 + 7000 + 300 + 50 + 8$$
$$= 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 3 \times 100 + 5 \times 10 + 8$$
$$= 4 \times (9999 + 1) + 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 5 \times (9 + 1) + 8$$
$$= 4 \times 9999 + 4 + 7 \times 999 + 7 + 3 \times 99 + 3 + 5 \times 9 + 5 + 8.$$
$$= (4 \times 9999 + 7 \times 999 + 3 \times 99 + 5 \times 9) + (4 + 7 + 3 + 5 + 8):$$

jedes der Produkte innerhalb der ersten Klammern ist durch 3 und 9 theilbar, also auch die ganze Summe innerhalb der ersten Klammern; die Theilbarkeit hängt demnach nur von der zweiten Summe $4 + 7 + 3 + 5 + 8$ ab; ist diese auch durch 3 und 9 theilbar, so ist das Ganze durch 9 theilbar; diese letzte Summe ist aber die Quersumme, also ist die Zahl durch 3 und 9 theilbar, wenn die Quersumme durch 3 und 9 theilbar ist.

Anmerkung. Quersumme heißt jene Zahl, welche man erhält, wenn man die einzelnen Ziffern (§ 2) einer dekadisch angeschriebenen Zahl ohne Berücksichtigung ihres Stellenwerthes addirt.

3) Durch 4 ist eine Zahl theilbar, wenn die durch die beiden letzten Ziffern dargestellte Zahl durch

4 theilbar ist. Z. B. 7356 ist durch 4 theilbar, weil 56 durch 4 theilbar ist. Denn schreibt man die Zahl wieder dekadisch an, so sind alle Hunderter, Tausender &c. durch 4 theilbar, also die ganze Zahl durch 4 theilbar, wenn die Zehner und Einer zusammengenommen durch 4 theilbar sind.

4) Durch 5 ist eine Zahl theilbar, wenn die letzte Ziffer 5 oder Null ist. (Erklärung dieselbe wie vorher.)

5) Durch 6 ist eine Zahl theilbar, wenn die Zahl durch 2 und 3 theilbar ist, z. B. 47412 ist durch 2 theilbar, weil die letzte Ziffer durch 2 theilbar ist, und durch 3, weil die Quersumme 18 durch 3 theilbar ist, also ist die Zahl auch durch 6 theilbar. (§ 28, 4.)

6) Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn die durch die 3 letzten Ziffern dargestellte Zahl durch 8 theilbar ist. Z. B. 710456 ist durch 8 theilbar, weil 456 durch 8 theilbar ist. (Erklärung wie bei 3.)

7) Eine Zahl ist durch 10 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer Null ist.

8) Durch 11 ist eine Zahl theilbar, wenn die Differenz zwischen der Summe der Ziffern an den ungeraden Stellen (Einer, Hunderter &c.) und der Summe der Ziffern an den geraden Stellen (Zehner, Tausender &c.) 0 oder eine durch 11 theilbare Zahl ist. Z. B. 97658 ist eine durch 11 theilbare Zahl, weil $(8 + 6 + 9) - (5 + 7) = 23 - 12 = 11$ durch 11 theilbar ist. Denn

$$97658$$
$$= 9 \times 10000 + 7 \times 1000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 8$$
$$= 9\,(9999 + 1) + 7\,(1001 - 1) + 6 \times (99 + 1) + 5 \times (11 - 1) + 8$$
$$= 9 \times 9999 + 9 + 7 \times 1001 - 7 + 6 \times 99 + 6 + 5 \times 11 - 5 + 8$$
$$= (9 \times 9999 + 7 \times 1001 + 6 \times 99 + 5 \times 11) + 9 - 7 + 6 - 5 + 8;$$

9999, 1001, 99, 11 sind durch 11 theilbar, also auch die Vielfachen davon, mithin der ganze eingeklammerte Ausdruck; es ist also die Theilbarkeit nur abhängig von $9 - 7 + 6 - 5 + 8 = (8 + 6 + 9) - (5 + 7)$ d. i. von der oben angegebenen Differenz.

9) Für die übrigen Zahlen gibt es kein so einfaches Kennzeichen der Theilbarkeit, deßhalb läßt man den Versuch entscheiden.

10) Will man alle Theiler einer Zahl finden, so versuche

man nach einander alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, bis man auf einen Quotienten kommt, welcher dem Divisor gleich oder kleiner als derselbe ist.

IV. Zerlegen einer Zahl in ihre einfachen und zusammengesetzten Theiler.

§ 30.

Um eine Zahl in ihre einfachen Theiler zu zerlegen, dividire man dieselbe durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist, hierauf den Quotienten wieder durch die kleinste Primzahl, die in ihm ohne Rest enthalten ist, und fahre so fort, bis man 1 als Quotient erhält. Z. B.

420	:	2
210	:	2
105	:	3
35	:	5
7	:	7
1		

also sind die einfachen Theiler (Faktoren) 2, 2, 3, 5, 7, deren Produkt der gegebenen Zahl 420 gleich ist.

Um die zusammengesetzten Theiler zu finden, darf man nur mit jedem folgenden einfachen alle vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten multipliziren. Also im obigen Beispiele:

420	:	2	
210	:	2	4
105	:	3	6, 12
35	:	5	10, 15, 20, 30, 60
7	:	7	14, 21, 35, 28, 42, 84, 70, 105, 140, 210, 420.
1			

Ein anderes Beispiel ist:

504	:	2	
252	:	2	4
126	:	2	8
63	:	3	6, 12, 24
21	:	3	9, 18, 36, 72
7	:	7	14, 21, 28, 56, 42, 84, 168, 63, 126, 252, 504.
1			

V. Größtes gemeinschaftliches Maß.

§ 31.

1) Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist diese letzte das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. Z. B. das größte gemeinschaftliche Maß von 63 und 21 ist 21.

2) Ausserdem wird das größte gemeinschaftliche Maß für zwei oder mehrere Zahlen gefunden, wenn man jede Zahl in ihre Primfaktoren zerlegt. Das Produkt der gemeinschaftlichen Faktoren ist dann das größte gemeinschaftliche Maß.

Z. B. Für 455 und 715 hat man:

$$455 = 5 \times 7 \times 13$$
$$715 = 5 \times 11 \times 13$$

also ist das größte gemeinschaftliche Maß für 455 und 715 das Produkt $5 \times 13 = 65$.

3) Ein anderes Verfahren geht aus folgendem Satze hervor: Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest bleibt, so ist das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor.

Z. B. Für 161 und 14 hat man:

$$\frac{11}{161 : 14}$$
$$21$$
7 als Rest.

Der Divisor 14 und der Rest 7 haben das größte gemeinschaftliche Maß 7, also ist 7 auch das größte gemeinschaftliche Maß für den Dividenden 161 und den Divisor 14. Denn da 7 in 14 ohne Rest enthalten ist, so muß es auch (nach § 28, 3) in 14×11 d. i. in 154 und (nach § 28, 1) in $154 + 7$ d. i. 161 enthalten sein, also ist 7 ein gemeinschaftliches Maß von 161 und 14, und zugleich das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen, denn 161 und 14 sind, wie schon nachgewiesen, durch 7 theilbar, also muß auch (nach § 28, 2 und 3) die Differenz $161 - 14 \times 11$ d. i. $161 - 154 = 7$ durch diese Zahl theilbar sein; da aber diese Differenz kein größeres Maß als 7 haben

kann, so ist 7 das größte gemeinschaftliche Maß von 161 und 154.

Hat man z. B. das größte gemeinschaftliche Maß von 325 und 247 zu suchen, so dividire man die größere Zahl durch die kleinere

```
      1
 ─────────
 325 : 247
  78
```

Divisor 247, Rest 78; hier ist das größte gemeinschaftliche Maß noch nicht leicht erkennbar, also sucht man dasselbe auf die nämliche Art für 247 und 78, somit hat man

```
      3
 ─────────
 247 : 78
  13
```

Divisor 78, Rest 13. Der Rest 13 ist aber ein Theiler von 78, also ist 13 für 13 und 78 das größte gemeinschaftliche Maß, somit auch für 78 und 247 und deßhalb auch für 325 und 247. Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgende Regel:

Es wird das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen auch gefunden, wenn man durch die kleinere Zahl die größere dividirt, durch den erhaltenen Rest den Divisor, u. s. f. immer durch den neuen Rest den vorhergegangenen Divisor, bis kein Rest mehr bleibt; dann ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maß. Ist der letzte Divisor 1, so sind die Zahlen relative Primzahlen.

Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß für 888 und 408 gesucht werden.

```
      2       5       1       2
 ───────────────────────────────
 888 : 408  :  72  :  48  :  24
  72    48     24     0
```

es ist also 24 das größte gemeinschaftl. Maß für 888 und 408.

Anmerkung. Das vorstehende Verfahren nennt man Ketten-Division. Soll durch dieses Verfahren zwischen drei oder mehreren Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß gesucht werden, so suche man es zuerst zwischen zwei beliebigen dieser Zahlen, am besten zwischen den kleinsten, dann zwischen dem gefundenen größten gemeinschaftlichen Maß und einer der andern Zahlen u. s. f., bis alle diese Zahlen in Rechnung gebracht sind. — Es seien die gegebenen Zahlen 154, 177 und 319, so hat man:

```
   1        7
176 : 154 : 22
 22     0
 14        2
319 :  22 : 11
 99     0
 11
```

also ist 11 das größte gemeinschaftl. Maß für 154, 176 und 319.

VI. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§ 32.

1) Das Produkt mehrerer Zahlen ist ein Vielfaches von jeder dieser Zahlen. Denn ein Produkt ist durch jeden seiner Faktoren theilbar, also jede dieser Zahlen in dem Produkte als Faktor enthalten.

2) Nach 1) erhält man ein gemeinschaftliches Vielfaches für mehrere Zahlen, wenn man das Produkt derselben herstellt. Dieses gemeinschaftliche Vielfache ist zugleich das kleinste, wenn die gegebenen Zahlen relativ prime Zahlen sind. Ist dieß nicht der Fall, so berücksichtige man Folgendes:

a) Sind einige der gegebenen Zahlen Theiler von andern, so ist ihr Produkt nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Z. B. für 9, 12 und 36 ist 36 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, weil in 36 jede dieser Zahlen enthalten ist; oder für 4, 20, 7, 21 ist 20 × 21 das kleinste gemeinschaftl Vielfache, weil 4 in 20 und 7 in 21 enthalten ist.

b) Haben zwei oder mehrere der gegebenen Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler, so ist dieser gemeinschaftliche Theiler zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen nur einmal nothwendig. Z. B. 6 und 14 haben den gemeinschaftlichen Theiler 2, dieser, mit den nicht gemeinschaftlichen Faktoren multiplizirt, gibt das kleinste gemeinschftl. Vielfache; aber 2 in 6 ist 3 mal enthalten,
2 „ 14 „ 7 „ „ mithin ist
2 × 3 × 7 = 42 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache; denn jeder der Faktoren dieser Zahlen kommt als Faktor in diesem Produkte vor, also ist dieses Produkt durch jede der gegebenen Zahlen theilbar; oder für 9, 15, 22, 77

3 in 9 ist 3 mal
3 „ 15 „ 5 „
11 „ 22 „ 2 „
11 „ 77 „ 7 „ enthalten, also ist

$3 \times 11 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$ d. i. 6930 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Bei Berücksichtigung dieser Fälle gründet sich auf die frühern Erklärungen folgendes allgemeine Verfahren für die Herstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen: Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachsten Faktoren, und nehme jeden Faktor so oft als Faktor in das gemeinsame Vielfache auf, als er in derjenigen Zahl enthalten ist, in welcher er am öftesten vorkommt. Man erhält z. B. für folgende Zahlen:

4, 6, 15, 20, 30, 35, 42, 64

$4 = 2 \times 2$ | $30 = 2 \times 3 \times 5$
$6 = 2 \times 3$ | $35 = 5 \times 7$
$15 = 3 \times 5$ | $42 = 2 \times 3 \times 7$
$20 = 2 \times 2 \times 5$ | $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, also ist der kleinste gemeinschftl. Dividend $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 6720$.

3) Das eben angegebene Verfahren kann auf folgende Weise abgekürzt werden.

a) Zufolge 2, a) dürfen diejenigen Zahlen weggelassen werden, welche Theiler von anderen sind.

b) Zufolge 2, b) kann man die gemeinschaftlichen Theiler herausstellen und durch dieselben dividiren, bis man lauter relative Primzahlen hat und ihr Produkt mit den (herausgestellten) gemeinschaftlichen Theilern multiplizirt.

Hieraus ergibt sich folgende Regel:

α) Streiche diejenigen Zahlen, welche in andern ohne Rest enthalten sind, weg.

β) Stelle hierauf die gemeinschaftlichen Theiler von zwei oder mehreren der übrigen Zahlen heraus, dividire durch dieselben, und fahre damit so lange fort, bis die erhaltenen Quotienten und die nicht theilbaren Zahlen relative Primzahlen sind, [bei dem Herausstellen der gemeinschaftlichen Theiler beginne man mit dem kleinsten derselben].

γ) Multiplizire die herausgestellten gemeinschaftl. Theiler und die relativen Primzahlen mit einander. Das erhaltene Produkt ist dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (der kleinste gemeinschaftliche Dividend).

z. B.	4,	6,	15,	20,	30,	35,	42,	64
	4,	6,	15,	20,	30,	35,	42,	64
2				10,	15,	35,	21,	32
2				5,	15,	35,	21,	16
3					5,	35,	7,	16
						35,		16

also ist 2 × 2 × 3 × 35 × 16 = 6720 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Vierte Abtheilung.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Brüche.

§ 33.

1) Wird eine Einheit in mehrere gleiche Theile getheilt, so nennt man einen oder mehrere solche gleiche Theile eine gebrochene Zahl oder einen Bruch. Zu jedem Bruche sind also zwe Zahlen nothwendig, eine, welche anzeigt, in wie viele Theile die Einheit getheilt worden ist, und eine, welche anzeigt, wie viele solche Theile genommen werden sollen. Die erstere heißt Nenner, die letztere Zähler des Bruches.

Man schreibt zuerst den Zähler, unter diesen den Nenner, und trennt sie durch einen Strich. Man liest zuerst den Zähler, dann den Nenner, und hängt an denselben die Silbe „tel;" z. B. $^3|_4$, gelesen „drei Viertel," bedeutet, daß die Einheit in vier gleiche Theile getheilt ist, und daß drei solche Theile genommen werden sollen. $^5|_6$ fl., gelesen „fünf Sechstel Gulden," bedeutet, daß der Gulden in sechs gleiche Theile getheilt ist, und daß 5 solche Theile genommen werden sollen; wird der Gulden in sechs gleiche Theile getheilt, so kommen auf einen Theil 10 kr., also auf 5 Theile 50 kr., mithin sind $^5|_6$ fl. = 50 Kreuzer.

Anmerkung. Im Gegensatze zu den Brüchen nennt man die früher behandelten Zahlen „ganze Zahlen."

§ 34.

1) Die Brüche werden eingetheilt:

a) in uneigentliche, das sind solche, deren Nenner ein Theiler des Zählers ist, z. B. $^{1}|_{1}$, $^{4}|_{2}$, $^{27}|_{9}$, und

b) in eigentliche, wenn der Nenner kein Theiler des Zählers ist.

Die eigentlichen Brüche werden eingetheilt:

α) in ächte, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, z. B. $^{3}|_{7}$, $^{14}|_{19}$, $^{25}|_{26}$, und

β) in unächte, wenn der Zähler größer ist als der Nenner, z. B. $^{3}|_{2}$, $^{6}|_{5}$, $^{14}|_{9}$.

2) Jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, ist gleich 1; z. B. $^{4}/_{4} = 1$; denn die Einheit soll in vier gleiche Theile getheilt werden, und 4 solche Theile sollen genommen werden, also erhält man wieder die Einheit, nämlich 1.

3) Jeder ächte Bruch ist kleiner als 1, jeder unächte grösser als 1; denn beim ächten Bruch hat man weniger Theile, bei dem unächten mehr Theile, als zur Einheit gehören.

4) Ein Ausdruck, welcher eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche ist, heißt gemischte Zahl, und es ist dabei gebräuchlich, das Additionszeichen weg zu lassen. Z. B. $4^{3}/_{5}$, $1^{2}/_{9}$.

Anmerkung. Der eben angeführte Fall ist der einzige, in welchem zwischen zwei Ausdrücken, von welchen der eine keine dekadische Zahl ist, nicht ein Multiplikationszeichen, sondern ein Additionszeichen zu denken ist.

§ 35.

Jeder Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden, dessen Dividend der Zähler, dessen Divisor der Nenner ist.

Z. B. Der Bruch $^{7}/_{9}$ bedeutet, daß die Einheit in 9 gleiche Theile getheilt, und 7 solche Theile genommen werden sollen; dasselbe erhält man aber auch, wenn die Zahl 7 in 9 gleiche Theile getheilt, und ein Theil genommen wird.

Daraus folgt dann das Verfahren, daß, wenn bei einer Division ein Rest bleibt, derselbe in Form eines Bruches, dessen Zähler der Rest, dessen Nenner der Divisor ist, zu der beim Dividiren erhaltenen ganzen Zahl gesetzt wird.

Z. B. $129 : 17 = 7^{10}/_{17}$.

§ 36.

1) Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch mit einer beliebigen Zahl als Nenner verwandeln, wenn man die gegebene Zahl mit der beliebigen multiplizirt, und diesem Produkte als Zähler die letztere Zahl

zum Nenner gibt. Soll z. B. 6 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 5 ist, so hat man:

$$6 = \frac{6 \times 5}{5} = \frac{30}{5}$$

denn ein Ganzes hat 5 Fünftel, also 6 Ganze 6 mal so viel, nämlich 30 Fünftel.

Zusatz. Jede Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist, d. i. $8 = {}^{8}/_{1}$.

2) Jede gemischte Zahl läßt sich in einen unächten Bruch verwandeln, wenn man die Ganzen mit dem Nenner multiplizirt, zu diesem Produkt den Zähler addirt und die erhaltene Summe durch den Nenner dividirt.

$$\text{Z. B. } 4^{3}/_{5} = \frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}.$$

4 Ganze geben ${}^{20}/_{5}$, dazu die gegebenen ${}^{3}/_{5}$, sind ${}^{23}/_{5}$.

3) Jeder unächte Bruch wird in eine gemischte Zahl verwandelt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt; die erhaltene ganze Zahl gibt die Ganzen, der Rest den Zähler des Bruches, dessen Nenner der gegebene Nenner ist.

Z. B. ${}^{29}/_{6} = 4^{5}/_{6}$.

6 Sechstel geben ein Ganzes, also 24 Sechstel 4 Ganze, somit bleiben als Rest ${}^{5}/_{6}$.

§ 37.

1) Von mehreren Brüchen, welche denselben Nenner haben, ist derjenige der größte, welcher den größten Zähler hat. Z. B. von ${}^{1}/_{5}$, ${}^{4}/_{5}$, ${}^{9}/_{5}$ und ${}^{12}/_{5}$ ist der letzte, nämlich ${}^{12}/_{5}$, der größte; denn da die Brüche gleiche Nenner haben, so ist überall die Einheit in gleich viele Theile getheilt, es sind also alle diese Theile unter einander gleich, mithin derjenige Bruch der größte, welcher die größte Anzahl solcher Theile enthält, das ist derjenige, der den größten Zähler hat.

2) Von mehreren Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner hat. Z. B. von ${}^{7}/_{3}$, ${}^{7}/_{5}$, ${}^{7}/_{12}$, ${}^{7}/_{20}$ ist ${}^{7}/_{3}$ der größte; denn die Zähler sind alle gleich, also enthält jeder Bruch gleich viele Theile, nämlich 7, es hängt also die Größe der Brüche von der Größe der Theile

ab; in je weniger Theile aber das Ganze getheilt wird, desto größer ist ein Theil, also ist unter den oben angegebenen Brüchen derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner hat.

3) Um Brüche mit verschiedenen Nennern und Zählern zu vergleichen, müssen dieselben auf gleiche Nenner (Benennung) gebracht werden.

II. Erweitern und Kürzen der Brüche.

§ 38.

Ein Bruch bleibt seinem Werthe nach ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

Z. B. $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$

Durch die Multiplikation des Zählers mit 3 ist der Bruch 3 mal so groß geworden, denn er hat jetzt dreimal so viele Theile; durch die Multiplikation des Nenners mit 3 wird aber ein jeder Theil des Bruches der dritte Theil des früheren, weil das Ganze jetzt in 3 mal so viele Theile getheilt ist, also hat man in dem neuen Bruch 3 mal so viele Theile, ein jeder Theil aber ist der dritte Theil des früheren, mithin sind die beiden Brüche ihren Werthen nach gleich. Damit ist auch der zweite Theil des Satzes erklärt, denn

$$\frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$$

Die erste dieser Veränderungen heißt Erweitern, die zweite Verkleinern (Reduziren, Kürzen) der Brüche.

Durch das Erweitern ist man in den Stand gesetzt, einen Bruch in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem gegebenen Nenner ist, dadurch, daß man durch den gegebenen Nenner den neuen dividirt, und mit dem Quotienten den Zähler und Nenner des Bruches multiplizirt.

Z. B. Es soll $^7|_{13}$ in einen andern Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 65 ist; 13 in 65 ist 5 mal enthalten, also hat man

$$\frac{7}{13} = \frac{7 \times 5}{13 \times 5} = \frac{35}{65}$$

Auf dieselbe Weise können mehrere Brüche auf denselben Nenner (Benennung) gebracht werden, wenn man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner sucht, durch jeden Nenner das kleinste gemeinschaftliche Vielfache [hier allgemeiner Nenner genannt] dividirt, und mit dem Quotienten den entsprechenden Zähler multiplizirt.

Z. B. Für $^3|_4$, $^5|_6$, $^7|_{15}$, $^{11}|_{30}$ hat man

2	4,	6,	15,	30
	2			15

$2 \times 2 \times 15 = 60$

4	in 60 ist	15	mal enthalten		$3 \times 15 = 45$
6	" " "	10	"	"	$5 \times 10 = 50$
15	" " "	4	"	"	$7 \times 4 = 28$
30	" " "	2	"	"	$11 \times 2 = 22$

somit erhält man $^{45}|_{60}$, $^{50}|_{60}$, $^{28}|_{60}$, $^{22}|_{60}$.

Anmerkung. Brüche auf denselben Nenner bringen heißt sie gleichnamig machen.

III. Addiren und Subtrahiren der Brüche.

§ 39.

1) Brüche, welche denselben Nenner haben, werden addirt, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividirt.

Z. B. $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2 + 3 + 4}{9} = \frac{9}{9} = 1$

Da die Brüche denselben Nenner haben, so sind die Theile einander gleich, können also addirt werden; der erste Bruch enthält 2, der zweite 3 und der dritte 4 solche gleiche Theile, also hat man im Ganzen 9 Theile, jeder derselben ist ein Neuntel, folglich erhält man $^9|_9$.

2) Brüche, welche verschiedene Nenner haben, müssen zuerst gleichnamig gemacht werden, und dann können sie (nach 1) addirt werden.

Z. B. a) $^4|_5$ und $^5|_6$ können nicht addirt werden, weil die Theile, auf welche sich diese Brüche beziehen, verschieden sind; es ist aber $^4|_5 = {}^{24}|_{30}$ und $^5|_6 = {}^{25}|_{30}$, also $^4|_5 + {}^5|_6 = {}^{24}|_{30} + {}^{25}|_{30} = {}^{49}|_{30} = 1\,{}^{19}|_{30}$.

b) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{15} + \frac{11}{10} + \frac{19}{40} + \frac{4}{6}$

2	8	12	15	10	40	6
2		6	15		20	
5		3	15		10	
			3		2	

$2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2 = 120$

$$\text{Summe} = \frac{45 + 50 + 56 + 132 + 57 + 20}{120} = \frac{360}{120} = 3.$$

3) Gemischte Zahlen werden addirt, indem man zur Summe aus den darin enthaltenen ganzen Zahlen die Summe der darin enthaltenen Brüche addirt.

Z. B. $1\frac{5}{8} + 3 + 2\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = (1 + 3 + 2) + \frac{5 + 7 + 2}{8}$
$= 6\frac{14}{8} = 7\frac{3}{4}$.

4) Ehe man den allgemeinen Nenner bestimmt, sehe man, ob die Brüche nicht gekürzt werden können, und wenn unächte Brüche dabei sind, so verwandle man dieselben zuerst in gemischte Zahlen.

Z. B. $4\frac{35}{150} + \frac{18}{12} + \frac{22}{70} + 3\frac{4}{15} + \frac{46}{20} + \frac{27}{70}$
$= 4\frac{7}{30} + 1\frac{1}{2} + \frac{11}{35} + 3\frac{4}{15} + 2\frac{3}{10} + \frac{27}{70}$

2	30,	2,	35,	15,	10	70
5	15					35
	3					7

$2 \times 5 \times 3 \times 7 = 210$

$$\text{Summe} = 10\,\frac{49 + 105 + 66 + 56 + 63 + 81}{210}$$
$$= 10\tfrac{420}{210} = 12.$$

5) Brüche, welche denselben Nenner haben, werden subtrahirt, wenn man den Zähler des Subtrahenden vom Zähler des Minuenden subtrahirt, und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Nenner dividirt.

Z. B. $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{11 - 5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (Erklärung wie bei 1).

6) Brüche, welche verschiedene Nenner haben, werden zuerst gleichnamig gemacht und dann (nach 5) subtrahirt.

Z. B. $\frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{15 - 4}{24} = \frac{11}{24}$.

7) Ist der Minuend eine ganze Zahl, oder bei gemischten Zahlen der Zähler des Subtrahenden größer als der des Minuenden, so nehme man von den vorhandenen Ganzen des Minuenden 1, verwandle dieses in Bruchtheile, welche im zweiten Falle zum Zähler des Minuenden addirt werden, und subtrahire.

Z. B. $4 - {}^{3}|_{8} = 3^{8}|_{8} - {}^{3}|_{8} = 3^{5}|_{8}$;

oder $3^{2}|_{9} - 1^{8}|_{15} = 2\,\frac{10 - 24}{45} = 1\,\frac{55 - 24}{45} = 1\,\frac{31}{45}$.

IV. Multiplizirен und Dividiren der Brüche.

§ 40.

1) Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man den Zähler mit der Zahl multiplizirt und den Nenner ungeändert läßt.

Z. B. $7 \times {}^{5}|_{6} = \frac{7 \times 5}{6} = {}^{35}|_{6}$;

denn $7 \times {}^{5}|_{6}$ bedeutet, daß 5 Theile, wovon jeder ein Sechstel ist, 7mal genommen werden sollen, somit erhält man 35 solche Theile, also ${}^{35}|_{6}$.

Ist die Zahl ein Theiler vom Nenner, oder haben die Zahl und der Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird nicht ausmultiplizirt, sondern die Multiplikation bloß angezeigt, und der Bruch dann (nach § 38) gekürzt.

Z. B. $3 \times {}^{5}|_{9} = \frac{\not{3} \times 5}{\not{9}\,.\,3} = {}^{5}|_{3} = 1^{2}|_{3}$, oder

$10 \times {}^{7}|_{12} = \frac{\not{10} \times 7\,.\,5}{\not{12}\,.\,6} = {}^{35}|_{6} = 5^{5}|_{6}$.

Soll eine gemischte Zahl multiplizirt werden, so multiplizire man (nach § 11. 2) sowohl die Ganzen als auch den Bruch mit der Zahl und addire die erhaltenen Produkte.

Z. B. a) $8 \times 5\,{}^3|_7 = 8 \times 5 + 8 \times {}^3|_7 = 40 + {}^{24}|_7 = 43\,{}^3|_7.$

b) $6 \times 3\,{}^2|_9 = 6 \times 3 + 6 \times {}^2|_9 = 18 + \frac{\cancel{6} \times 2 \cdot 2}{\cancel{9} \cdot 3}$

$= 18 + {}^4|_3 = 19\,{}^1|_3.$

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß dasselbe Resultat erhalten wird, wenn man vor der Ausführung der Multiplikation die gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandelt.

2) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit der Zahl multiplizirt und den Zähler beibehält.

Z. B. $^4|_5 : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = {}^4|_{15}$

$^4|_5 : 3$ bedeutet, daß $^4|_5$ in 3 gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil genommen werden, also $^4|_5$ dreimal so klein werden soll; multiplizirt man daher den Nenner mit 3, so ist die Einheit in 3 mal so viele Theile getheilt, also ein Theil 3 mal so klein, mithin, da der Zähler ungeändert bleibt, ist der Bruch $^4|_{15}$ der dritte Theil von $^4|_5$, also durch 3 dividirt.

Ist die Zahl ein Theiler vom Zähler, oder haben Zahl und Zähler einen gemeinschaftlichen Theiler, so wird nicht ausmultiplizirt, sondern die Multiplikation bloß angezeigt und dann wieder (nach § 38) gekürzt.

Z. B. $^4|_9 : 2 = \frac{\cancel{4} \cdot 2}{9 \times \cancel{2}} = {}^2|_9$;

oder $^{10}|_{17} : 15 = \frac{\cancel{10} \cdot 2}{17 \times \cancel{15} \cdot 3} = {}^2|_{51}.$

Soll eine gemischte Zahl dividirt werden, so dividire man [nach § 14, 2] sowohl die ganze Zahl als auch den Bruch und addire die erhaltenen Quotienten.

Z. B. a) $9\,{}^2|_3 : 5 = {}^9|_5 + {}^2|_3 : 5 = 1\,{}^4|_5 + {}^2|_{15} = 1\,\frac{12+2}{15} = 1\,{}^{14}|_{15}.$

b) $6\,{}^9|_{11} : 3 = {}^6|_3 + {}^9|_{11} : 3 = 2 + \frac{\cancel{9} \cdot 3}{11 \times \cancel{3}} = 2\,{}^3|_{11}.$

Anmerkung. Auch hier kann man, wie bei der Multiplikation, vor Ausführung der Division die gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandeln.

3) Zwei oder mehrere Brüche werden multipli-

zirt, wenn man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividirt.

Z. B. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{5 \times 4}{7 \times 9} = \frac{20}{63}$;

denn multiplizirt man den Zähler des Bruches $\frac{5}{7}$ mit 4, so ist das Resultat $\frac{20}{7}$ das 9fache des verlangten, weil nicht mit 4, sondern nur mit dem 9. Theile von 4 multiplizirt werden soll, es muß also von $\frac{20}{7}$ der 9. Theil genommen, d. h. durch 9 dividirt werden, was (nach 2) dadurch geschieht, daß man den Nenner mit 9 multiplizirt, also hat man $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{63}$.

Haben der Zähler des einen Bruches und der Nenner des andern Bruches einen gemeinschaftlichen Theiler, so zeige man die Multiplikation bloß an und kürze.

Z. B. $\frac{7}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{9} \,.\, 3}{\cancel{15} \times \cancel{14} \,.\, 2 \,.\, 5} = \frac{3}{10}$.

oder: $\frac{8}{9} \times \frac{6}{25} \times \frac{45}{32} = \frac{\cancel{8} \times \cancel{6} \times \cancel{45} \,.\, \cancel{5} \,.\, 3}{\cancel{9} \times \cancel{25} \times \cancel{32} \,.\, \cancel{4} \,.\, 5 \,.\, 2} = \frac{3}{10}$.

Hat man gemischte Zahlen zu multipliziren, so verwandle man sie vorher in unächte Brüche.

Z. B. $4\frac{5}{18} \times 1\frac{5}{22} \times \frac{8}{21} = \frac{\cancel{77} \times \cancel{27} \times \cancel{8} \,.\, \cancel{7} \,.\, \cancel{4} \,.\, \cancel{9}}{\cancel{18} \times \cancel{22} \times \cancel{21} \,.\, \cancel{2} \,.\, \cancel{7} \,.\, \cancel{2}} = 2$

4) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, indem man den Divisor umstürzt (d. h. den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler macht), und den Dividend damit multiplizirt.

Z. B. $\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$,

denn dividirt man $\frac{4}{5}$ durch 3, was $\frac{4}{15}$ gibt, so ist dieser Bruch der 7. Theil des gesuchten, weil nicht durch 3, sondern bloß durch den 7. Theil von 3 dividirt werden soll, $\frac{4}{15}$ muß also 7 mal so groß gemacht, d. h. mit 7 multiplizirt werden, was (nach 1) dadurch geschieht, daß man den Zähler multiplizirt.

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so kann man der Zahl den Nenner 1 geben, und dann die vorhergehende Regel anwenden.

Z. B. $6 : \frac{11}{7} = \frac{6}{1} : \frac{11}{7} = \frac{6 \times 7}{11} = \frac{42}{11} = 3\frac{9}{11}$.

Auch hier zeige man die Multiplikation bloß an und kürze, wenn es möglich ist.

Hat man gemischte Zahlen zu dividiren, so verwandle man sie vorher in unächte Brüche.

Z. B. $3\frac{3}{5} : \frac{9}{10} = \frac{18 \times 10 \,.\, 2 \,.\, 2}{5 \times 9 \,.} = 4.$

Fünfte Abtheilung.

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen.

I. Erklärungen.

§ 41.

Betrachtet man eine beliebige mehrziffrige Zahl, z. B. 4728, welche nach der Erklärung vom Dezimalsystem gleich ist: 4000 + 700 + 20 + 8 oder 4 × 1000 + 7 × 100 + 2 × 10 + 8 so sieht man, daß die Einheit einer jeden folgenden Ziffer, wenn man von links nach rechts geht, den zehnten Theil des Werthes der vorausgehenden erhält. Setzt man eine Ziffernreihe über die Einerstellen hinaus nach rechts fort, nachdem man nach der Einerstelle ein Komma oder einen Punkt gemacht hat, so wird ebenso die Einheit der ersten Ziffer nach dem Komma den zehnten Theil des Werthes der vorausgehenden d. h. der Einer erhalten, also $\frac{1}{10}$ sein, die der zweiten Stelle $\frac{1}{100}$, der folgenden $\frac{1}{1000}$ u. s. f., d. h. die Einheit jeder folgenden Stelle wird der zehnte Theil von jeder der unmittelbar vorhergehenden sein. Es bedeuten also die nach dem Komma folgenden Ziffern Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 oder überhaupt eine mit 1 und lauter Nullen geschriebene Zahl ist. Solche Brüche heißen Dezimalbrüche, und die Ziffern nach dem Komma (ihre Zähler) Dezimalen.

Das Wesen der Dezimalbrüche ist demnach im Zahlensysteme begründet.

Anmerkung. 1) Sind keine Ganzen vorhanden, so schreibt man an ihre Stelle eine Null; ebenso werden die vor der letzten links stehenden geltenden Ziffer fehlenden Dezimalstellen durch Nullen angezeigt.

Anmerkung. 2) Im Gegensatze zu den Dezimalbrüchen nennt man die früher behandelten Brüche gemeine Brüche.

Nach obiger Erklärung ist also:

$6,493 = 6 + {}^{4}|_{10} + {}^{9}|_{100} + {}^{3}|_{1000}$ (1) oder, wenn man addirt
$= 6^{493}|_{1000}$ (2) oder auch
$= {}^{6493}|_{1000}$ (3)
$25,40207 = 25 + {}^{4}|_{10} + {}^{2}|_{1000} + {}^{7}|_{100000}$ (1) oder, wenn man addirt,
$= 25^{40207}|_{100000}$ (2) oder auch
$= {}^{2540207}|_{100000}$ (3)

Aus diesen Beispielen geht hervor, daß jeder Dezimalbruch auf dreifache Art ausgesprochen werden kann, und zwar:

I) indem man zuerst die Ganzen liest, und dann jede einzelne Dezimalstelle mit ihrem Nenner, wie in dem

1. Beispiele (1) 6 Ganze, 4 Zehntel, 9 Hundertel und 3 Tausendtel
2. „ (1) 25 „ 4 „ 0 „ 2 und 7 Hunderttausendtel:

II) indem man die Ganzen für sich, dann sämmtliche Dezimalstellen als den Zähler eines Bruches liest, dessen Nenner mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als Dezimalstellen vorhanden sind, daher dem Nenner der letzten Dezimalstelle gleich ist, also im

1. Beispiele (2) 6 Ganze und 493 Tausendtel
2. „ (2) 25 „ „ 40207 Hunderttausendtel; endlich

III) wenn man die Ganzen und Dezimalstellen als eine Zahl, und zwar als Zähler eines Bruches liest, dessen Nenner gleich dem der letzten Dezimalstelle ist, wie im

1. Beispiele (3) 6493 Tausendtel
2. „ (3) 2540207 Hunderttausendtel.

Für das Anschreiben der Dezimalbrüche hat man Folgendes zu merken:

Werden dieselben nach II gelesen, so schreibe man zuerst die Ganzen, setze nach denselben das Komma, und dann den Zähler des Bruches, wobei nicht zu übersehen ist, daß der Dezimalbruch so viele Dezimalstellen haben muß, als der Nenner Nullen hat. Die fehlenden Stellen sind dann durch Nullen zu ergänzen.

Wird aber der Dezimalbruch nach III gelesen, so schreibe man zuerst den Zähler des Bruches, und schneide von rechts nach links so viele Ziffern als Dezimalstellen ab, als der Nenner Nullen hat.

Aus diesen Beispielen folgt zugleich, wie man jeden Dezimalbruch in Form eines gemeinen Bruches schreiben kann, nämlich:

1) indem man zuerst die Ganzen anschreibt und den Dezimalstellen als Zähler einen Nenner gibt, welcher mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als Dezimalstellen vorhanden sind, oder

2) indem man das Komma wegläßt und der dadurch erhaltenen ganzen Zahl einen Nenner gibt, welcher wie in 1) gebildet wird.

Z. B. a) $4,763 = 4\frac{763}{1000}$ oder $= \frac{4763}{1000}$

b) $4,00072 = 4\frac{72}{100000}$ oder $= \frac{400072}{100000}$

c) $0,0246 = \frac{246}{10000}$.

Ein Dezimalbruch bleibt seinem Werthe nach ungeändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt oder wegläßt.

Z. B. $0,043 = 0,04300$;

denn hängt man dem Bruche wie hier 2 Nullen an, so erhält dadurch der Bruch 2 Dezimalstellen mehr, also auch der Nenner so viele Nullen mehr, man hat demnach jetzt $\frac{4300}{100000}$, während man vorhin $\frac{43}{1000}$ hatte, welche beiden Brüche einander gleich sind.

Es läßt sich also jede ganze Zahl als Dezimalbruch darstellen, wenn man nach der ganzen Zahl ein Komma macht und Nullen als Dezimalstellen anhängt.

II. Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche.

§ 42.

Sollen gemeine Brüche von einfachster Form in Dezimalbrüche verwandelt werden, so hat man die gemeinen Brüche in andere Brüche umzuformen, deren Nenner 10, 100, 1000 oder überhaupt eine Zahl ist, die mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird. Nach § 38 ist z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

$$\frac{3}{625} = \frac{3 \times 16}{625 \times 16} = \frac{48}{10000} = 0,0048$$

Dieses Verfahren ist aber nur möglich für solche Nenner, welche Theiler sind von 10, 100, 1000 ꝛc., oder welche keinen andern einfachen Faktor enthalten, als 2 und 5; denn da 10, 100, 1000 u. s. f. selbst nur die einfachen Theiler 2 und 5 haben, so können nur solche Zahlen Theiler davon sein, deren einfache Faktoren 2 und 5 sind; so kann z. B. 6 in keiner der Zahlen 10, 100 ꝛc. ohne Rest enthalten sein, weil 6 den Theiler 3 hat, und 3 kein Theiler der Zahlen 10, 100 ꝛc. ist. Es ist demnach ein Verfahren nothwendig, welches für jeden Nenner giltig ist.

Ist z. B. $^7|_{16}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln, so ist

$^7|_{16} = \frac{70}{16 \times 10}$ (wenn Zähler und Nenner mit 10 multiplizirt werden); dividirt man nun 70 zuerst durch 16, so muß man das Resultat noch durch 10 dividiren (§ 14, 6); man hat also, da 70 durch 16 dividirt den Quotienten 4 und den Rest 6 gibt, wenn man Quotient und Rest noch durch 10 dividirt,

$$^7|_{16} = \frac{70}{16 \times 10} = \frac{4 \times 16 + 6}{16 \times 10} = {^4|_{10}} + \frac{6}{16 \times 10};$$

es ist aber $\frac{6}{16 \times 10} = \frac{60}{16 \times 100}$,

wenn man wieder mit 10 erweitert; 16 in 60 ist 3 mal enthalten, bleibt der Rest 12, also wenn Quotient und Rest noch durch 100 dividirt werden:

$$\frac{6}{16 \times 10} = \frac{60}{16 \times 100} = \frac{3 \times 16 + 12}{16 \times 100} = {^3|_{100}} + \frac{12}{16 \times 100};$$

nun ist ferner $\frac{12}{16 \times 100} = \frac{120}{16 \times 1000}$

16 in 120 ist 7mal enthalten, dabei bleibt der Rest 8, und wird noch durch 1000 dividirt, so erhält man:

$$\frac{12}{16 \times 100} = \frac{120}{16 \times 1000} = {^7|_{1000}} + \frac{8}{16 \times 1000};$$

endlich ist $\frac{8}{16 \times 1000} = \frac{80}{16 \times 10000}$

16 in 80 ist 5 mal ohne Rest enthalten, daher ist

$$\frac{8}{16 \times 1000} = \frac{80}{16 \times 10000} = {^5|_{10000}},$$

somit ist: $^7|_{16} = {^4|_{10}} + {^3|_{100}} + {^7|_{1000}} + {^5|_{10000}} = 0{,}4375.$

Dieses Verfahren wird dadurch abgekürzt, daß man bloß dem Zähler eine Null anhängt, durch den Nenner dividirt, und den erhaltenen Quotienten an die Stelle der Zehntel schreibt, dem Reste wieder eine Null anhängt, durch den Nenner dividirt, und den Quotienten an die Stelle der Hundertel schreibt und so fortfährt.

Z. B. $\frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots$

20	12 in 50	ist 4mal	enthalten	mit	dem	Reste	2
80	„ „ 20	„ 1mal	„	„	„	„	8
8	„ „ 80	„ 6mal	„	„	„	„	8

Es bleibt nun immer derselbe Rest, mithin erhält man immer denselben Quotienten, und die Dezimalstelle 6 wiederholt sich ohne Ende, was mit dem früher Gesagten übereinstimmt, weil 12 den Faktor 3 enthält, der in keiner der Zahlen 10, 100, 1000 ꝛc. ohne Rest enthalten ist. Es gibt also der gemeine Bruch $^5|_{12}$ einen Dezimalbruch, dessen Dezimalstellen ohne Ende fortgehen. Der Werth dieses gemeinen Bruches kann daher nie genau durch einen Dezimalbruch dargestellt werden, jedoch kann man diesem Werthe um so näher kommen, je mehr Dezimalstellen man nimmt.

Solche Dezimalbrüche heissen **unendliche Dezimalbrüche**, und alle diejenigen auf die einfachste Form gebrachten gemeinen Brüche geben solche unendliche Dezimalbrüche, deren Nenner sich nicht in lauter Faktoren 2 und 5 zerlegen lassen (einen anderen Primfaktor als 2 oder 5 haben).

Aus dem Vorhergehenden folgt als Regel für das Verwandeln eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch:

Man dividire den Zähler durch den Nenner, wodurch die Ganzen erhalten werden, hänge an den Rest eine Null, dividire wieder durch den Nenner, der erhaltene Quotient gibt die Zehntel; hänge hierauf an den Rest wieder eine Null, dividire abermals durch den Nenner, wodurch die Hundertel erhalten werden, und fahre so fort, bis entweder der Rest 0 wird, oder bis ein Rest zum Vorschein kommt, der schon vorgekommen ist.

Die Dezimalstellen, welche sich bei einem unendlichen Dezimalbruche wiederholen, heissen die **Periode**, weßhalb diese Dezimalbrüche auch **periodische** genannt werden. Die Periode

wird gewöhnlich zweimal geschrieben, worauf dann einige Punkte folgen.

Die periodischen Dezimalbrüche zerfallen:

1) in rein periodische, wenn die Periode unmittelbar nach dem Komma beginnt; z. B. 0,33 . . .; 0,476476 . . . .; 9,0303 . . . .

2) in unrein (gemischt) periodische, wenn der Periode noch andere Dezimalstellen vorausgehen;

Z. B. 64,0329329 . . . . die Periode ist 329; oder 0,2054307307 . . . . die Periode ist 307.

Die größtmögliche Anzal der Stellen einer Periode ist um 1 kleiner als die Menge der Einheiten des Nenners vom gegebenen gemeinen Bruche; denn verwandelt man z. B. $^3|_7$ in einen Dezimalbruch, so kann als Rest nur 1, 2, 3, 4, 5, 6 vorkommen, also sind, wenn man Nullen anhängt und dividirt, nur 6 verschiedene Quotienten möglich, so daß dann einer der schon vorhergegangenen Reste folgen muß, wie in folgendem Beispiele:

$^3|_7$ = 0,428571
30
 20
  60
   40
    50
     10
      3

es folgt also wieder 3 als Rest, mithin wiederholt sich die Periode 428571, somit ist $^3|_7$= 0,428571428571 . . . .

Anmerkung. Im Gegensatze zu den unendlichen Dezimalbrüchen nennt man die übrigen endliche.

III. Addition und Subtraktion der Dezimalbrüche.

§ 43.

Dezimalbrüche werden addirt oder subtrahirt, indem man die gleichnamigen Stellen (Stellen von gleichem Lokalwerth) wie bei ganzen Zahlen addirt und das Komma an jene Stelle schreibt, wo es bei den Summanden steht. Sind die gegebenen Brüche nicht gleich-

namig, so kann man sie durch Anhängen von Nullen gleichnamig machen.

Z. B. 1) 64,037 × 2,8953 + 0,98736
$$= 64{,}03700 + 2{,}89530 + 0{,}98736 = 67{,}91966$$

2) 980,375 — 109,8436
$$= 980{,}3750 - 109{,}8436 = 870{,}5314$$

Das Verfahren ergibt sich aus dem dekadischen Zahlensystem.

IV. Multiplikation der Dezimalbrüche.

§ 44.

1) Soll ein Dezimalbruch mit 10 multiplizirt werden, z. B. 4,823 × 10, so erhält jede Stelle desselben einen 10mal so großen Werth; es werden demnach die Hundertel Zehntel, die Zehntel Einer u. s. f., was dadurch erreicht wird, daß man das Komma um eine Stelle nach rechts rückt, mithin ist

$$4{,}823 \times 10 = 48{,}23.$$

Hat man mit 1000 zu multipliziren, z. B. 98,03 × 1000, so erhält jede Stelle einen 1000mal so großen Werth, die Hundertel werden also Zehner u. s. f., was dadurch geschieht, daß man das Komma um 3 Stellen nach rechts rückt, wobei aber im vorstehenden Beispiele, da bloß 2 Dezimalstellen gegeben sind, eine Null angehängt werden muß, somit ist

$$98{,}03 \times 1000 = 98030.$$

Hieraus folgt die Regel:

Dezimalbrüche werden mit 10, 100, 1000 oder überhaupt mit einer Zahl multiplizirt, welche mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, indem man das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, als der Multiplikator Nullen hat; die rechts fehlenden Stellen sind durch Nullen zu ergänzen.

2) Sind zwei Dezimalbrüche mit einander zu multipliziren, z. B. 4,302 × 0,0045, so erhält man, wenn sie in gemeine Brüche verwandelt werden,

$$4{,}302 \times 0{,}0045 = \frac{4302}{1000} \times \frac{45}{10000} = \frac{4302 \times 45}{1000 \times 10000} = \frac{193590}{10000000}$$
$$= 0{,}019359$$

oder
$$6{,}002 \times 0{,}403 = \frac{6002}{1000} \times \frac{403}{1000} = \frac{6002 \times 403}{1000000}$$
$$= \frac{2418806}{1000000} = 2{,}418806.$$

Vergleicht man diese beiden Aufgaben, so findet man, daß das Resultat als ein gemeiner Bruch erhalten wurde, dessen Zähler das Produkt der beiden Dezimalbrüche mit Hinweglassung des Komma ist, dessen Nenner aber mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als die beiden gegebenen Dezimalbrüche zusammen Dezimalstellen haben, so daß man im Zähler von rechts nach links so viele Stellen als Dezimalen abzuschneiden hat, als die beiden Faktoren zusammen Dezimalstellen haben, wodurch das Produkt als ein Dezimalbruch erhalten wird. Daher erhält man die Regel:

Dezimalbrüche werden multiplizirt, indem man ohne Rücksicht auf das Komma [wie bei ganzen Zahlen] *multiplizirt und von dem dadurch erhaltenen Produkte von rechts nach links so viele Stellen als Dezimalen abschneidet, als die beiden Faktoren zusammen Dezimalstellen haben.*

Z. B. 0,000273 × 25 = 0,006825
273 × 25 = 6825
oder 9,204 × 0,04 = 0,36816
9204 × 4 = 36816

V. Division der Dezimalbrüche.

§ 45.

1) Soll ein Dezimalbruch durch 10 dividirt werden, z. B. 64,93 : 10, so erhält (nach § 14, 2) jede Stelle den zehnten Theil des früheren Werthes, aus den Hunderten werden Zehner, aus den Zehnern Einer, aus den Einern Zehntel u. s. f., so daß man nur das Komma um eine Stelle nach links zu rücken braucht, also hat man

64,93 : 10 = 6,493.

Aehnlich ist es, wenn der Divisor 100, 1000 ꝛc. ist; z. B. 4,302 : 1000; da hier jede Stelle den tausendsten Theil des früheren Werthes erhalten muß, so daß die Einer Tausendtel, die

Zehntel Zehntausendtel ꝛc. werden, so hat man das Komma um 3 Stellen, d. i. um so viel, als der Divisor Nullen hat, nach links zu rücken, und erhält:

4,302 : 1000 = 0,004302.

Daraus folgt die Regel:

Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividirt, wenn man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, als der Divisor Nullen enthält.

2) Es sei ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, z. B. 47,28 : 4, so hat man: 4 in 47 ist 11 mal enthalten, und es bleibt der Rest 3, man hat daher im Quotienten 11 Ganze; den Rest 3 Einer verwandelt man in 30 Zehntel und addirt dazu die schon vorhandenen 2, was 32 Zehntel gibt, 4 in 32 ist 8 mal enthalten, da aber Zehntel dividirt wurden, so ist der Lokalwerth dieser Stelle im Quotienten Zehntel; endlich 4 in 8 ist 2 mal enthalten; da der Dividend 8 Hundertel ist, so ist der Quotient 2 ebenfalls durch Hundertel ausgedrückt, somit hat man:

47,28 : 4 = 11,82;

oder 0,0046 : 5

5 ist in 0 Einern 0 mal enthalten,
5 „ „ 0 Zehnteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 0 Hunderteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 4 Tausendteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 46 Zehntausendteln 9 mal enthalten, mit d. Reste 1
5 „ „ 10 Hunderttausendteln 3 mal enthalten, mithin

0,0046 : 5 = 0,00092.

Hieraus folgt die Regel:

Um einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, dividire man zuerst die Ganzen, setze das Komma und zu dem Rest die Zehntel. Hierauf dividire man den so erhaltenen Ausdruck und verfahre mit den Hunderteln, Tausendteln ꝛc., wie mit den Zehnteln bis zur letzten Dezimalstelle; bleibt dann ein Rest, so hänge man demselben eine Null an, und verfahre im Folgenden ebenso wie bei Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch.

Z. B. a) 482,0532 : 6 = 80,3422
b) 0,00074624 : 11 = 0,00006784
c) 2,47 : 3 = 0,8233 . . .

3) Hat man durch einen Dezimalbruch zu dividiren, wie z. B. 4,736 : 0,04, so kann man diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, daß man den Dividenden und den Divisor mit 100 multiplizirt, wodurch der Werth des Quotienten nicht geändert wird, man erhält daher (nach § 44, 1)

$$4{,}736 : 0{,}04 = \frac{473{,}6}{4} = 118{,}4;$$

oder 170,343 : 0,00243

Da hier der Divisor 5 Dezimalstellen hat, so muß man Dividend und Divisor mit 100000 multiplizire, oder, was dasselbe ist, im Dividend und Divisor das Komma um 5 Stellen nach rechts rücken,

also erhält man $170{,}343 : 0{,}00243 = \frac{17034300}{243} = 70100.$

Daher hat man die Regel:

Um durch einen Dezimalbruch zu dividiren, rücke man im Dividend und Divisor das Komma um so viele Stellen nach rechts, als der Divisor Dezimalstellen enthält. Dadurch ist diese Aufgabe auf die unmittelbar vorhergehende zurückgeführt.

Z. B. a) $24{,}15 : 0{,}23 = \frac{2415}{23} = 105,$

b) $6520{,}5 : 3{,}15 = \frac{652050}{315} = 2070,$

c) $24{,}037 : 0{,}03 = \frac{2403{,}7}{3} = 801{,}233 \ldots$

VI. Verwandlung der unendlichen Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

§ 46.

1) Es sei der rein periodische Dezimalbruch 0,376376 .... gegeben. Multiplizirt man denselben mit 1000, so erhält man 376,376 ...., von diesem Produkte den gegebenen Dezimalbruch subtrahirt, gibt die Differenz
376,376 .... — 0,376 .... = 376 (da die Dezimalstellen gleich sind, so fallen sie weg).

Diese Differenz 376 ist das 999fache des gegebenen Dezimalbruches; denn von dem 1000fachen des gegebenen Bruches wurde das 1fache subtrahirt, folglich bleibt das 999fache. Um daraus den Werth des gegebenen Bruches zu erhalten, hat man durch 999 zu dividiren und es ist:

$$0{,}376376\ .\ .\ .\ . = \frac{376}{999};$$

oder hat man den Dezimalbruch 0,00420042 . . . .
so ist das 10000fache = 42,0042 . . . .
" " " 1 " = 0,0042 . . . .
somit das 9999fache = 42, folglich das

$$1\text{fache} = \frac{42}{9999}.$$

$$\text{also } 0{,}00420042\ .\ .\ .\ . = \frac{42}{9999} = \frac{14}{3333}.$$

Aus vorstehenden Beispielen folgt die Regel:

Jeder rein periodische Dezimalbruch wird dadurch in einen gemeinen Bruch verwandelt, daß man die Periode als Zähler eines Bruches anschreibt und ihr einen Nenner gibt, der mit so vielen Neunern geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Z. B. a) 4,33 . . . . = $4^3/_9$ = $4^1/_3$
b) 0,0202 . . . = $^2/_{99}$
c) 68,301301 . . . = $68^{301}/_{999}$

2) Ist der Dezimalbruch ein gemischt periodischer, z. B. 0,352727 . . . ., so ist
das 10000fache desselben 3527,27 . . .
" 100 " " 35,27 . . . .
subtrahirt man das 100fache von dem 10000fachen, so bleibt das 9900fache, und die Differenz der Brüche, da die Dezimalstellen wieder sämmtlich wegfallen, ist 3527 — 35, somit das Einfache der 9900. Theil, also

$$0{,}352727\ .\ .\ .\ . = \frac{3527 - 35}{9900};$$

oder, wenn 0,004302302 . . . . gegeben ist, so ist
das 100000fache = 4302,302 . . . .
" 100fache = 4,302 . . . .
also das 99900fache = 4302 — 4 und

$$\text{das 1fache} = \frac{4302-4}{99900},$$

somit

$$0{,}004302302\ldots = \frac{4302-4}{99900} = \frac{4298}{99900} = \frac{2149}{49950},$$

Daraus ergibt sich folgende Regel:

Jeder gemischt periodische Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die der Periode vorausgehenden Stellen mit der Periode zusammen als eine ganze Zahl betrachtet, davon die der Periode vorausgehenden Stellen [ebenfalls als ganze Zahl] subtrahirt, und der erhaltenen Differenz als Zähler eines Bruches einen Nenner gibt, der mit so vielen Neunern geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat, mit so vielen angehängten Nullen, als der Periode Dezimalstellen vorangehen.

Z. B. a) $460{,}073232\ldots = 460\frac{732-7}{9900}$

$= 460^{625}/_{9900} = 460^{25}/_{396}$

b) $0{,}321405405\ldots = \frac{321405-321}{999000} = \frac{321084}{999000}$

$= \frac{8919}{27750} = \frac{2973}{9250}.$

VII. Abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen.

A. Erklärung.

§ 47.

Will man von dem Dezimalbruche 4,2568 keine Zifferstelle von geringerem Stellenwerthe als Tausendtel in Rechnung bringen, so wird man statt seiner 4,257 setzen, weil, nachdem man einmal auf vollständige Genauigkeit verzichtet hat, der Fehler bei dieser Substitution geringer ist, als wenn man 4,256 gesetzt hätte. Denn im ersten Falle hat man 2 Zehntausendtel zu viel, im zwei-

ten aber hätte man 8 Zehntausendtel zu wenig genommen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Regel:

Wenn von einem Dezimalbruche nicht sämmtliche Stellen in die Rechnung genommen werden sollen, so wird die letzte beibehaltene Stelle um eine Einheit erhöht, wenn die nächst folgende (erste weggelassene) Stelle größer ist als 4.

Diese Erhöhung bezeichnet man mit dem Namen Correktur.

B. Addition und Subtraktion.

§ 48.

1) Sollen für die Summe der Dezimalbrüche:

$$4,72819 + 0,052764 + 0,004146 + 6,8259$$

nur jene Stellen in Rechnung gezogen werden, welche einen höheren Werth als die Zehntausendtel haben, so erhält man durch die Correktur:

$$4,728 + 0,053 + 0,004 + 6,826 = 11,611.$$

Anmerkung. Da der Fehler bei jedem Summanden höchstens 5 Einheiten der ersten weggelassenen Dezimalstelle betragen kann, so findet man den größten Fehler, welcher im Resultate enthalten sein kann, indem man fünf Einheiten der ersten weggelassenen Dezimalstelle mit der Anzahl der Summanden multiplizirt. Dabei versteht es sich von selbst einerseits, daß der Fehler ebensowohl in Vergrößerung als in Verkleinerung des Resultates bestehen kann, sowie anderseits, daß die Fehler, welche bei den einzelnen Summanden gemacht wurden, sich gegenseitig mehr oder weniger, in einzelnen Fällen (wie im obigen Beispiele) aber auch ganz aufheben können.

2) Sollen für die Differenz

$$8,70996 - 4,055431$$

nur jene Stellen in Rechnung gezogen werden, welche einen höheren Werth als die Zehntausendtel haben, so erhält man

$$8,710 - 4,055 = 4,655.$$

Anmerkung. 1) Da der Fehler bei Minuend und Subtrahend jedesmal höchstens fünf Einheiten der ersten weggelassenen Stelle betragen kann, und diese Fehler, wenn sie in demselben Sinne gemacht wurden, sich aufheben oder wenigstens vermindern, im entgegengesetzten Falle aber sich addiren, so beträgt der größte Fehler, welcher hier vorkommen kann, eine Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle.

Anmerkung. 2) Aus den beiden vorhergehenden Anmerkungen geht hervor, daß, wenn man bei der Subtraktion eine bestimmte Stelle als letzte

noch mit möglichst vollkommener Genauigkeit erhalten will, noch die nächst niedrigere in Rechnung gezogen werden muß, während es bei der Addition von der Anzahl der Summanden abhängt, um wie viel Stellen man mehr in Rechnung ziehen muß, als man im Resultate mit Genauigkeit erhalten will.

Anmerkung. 3) Aus dem Vorhergehenden folgt auch, daß die Nullen am Ende eines Dezimalbruches eine Bedeutung haben können und (im Gegensatze zu § 41, Ende) nicht weggelassen werden dürfen, wenn man dadurch andeuten will, daß sich die Genauigkeit der Angabe bis auf die betreffende Dezimalstelle erstreckt.

C. Multiplikation.

§ 49.

Das Produkt 42,35649 × 7,2531 soll auf drei Dezimalstellen berechnet werden.

42,35649 mit den 7 Einern des Multiplikators multiplizirt gibt fünf Dezimalstellen, drei davon sind bloß nothwendig, man braucht daher mit 7 nur 42,356 zu multiplizíren; der Multiplikand mit der zweiten Ziffer des Multiplikators, nämlich mit 2 Zehnteln multiplizirt gibt sechs Dezimalstellen, also sind hier drei Stellen überflüssig. daher darf man mit 2 bloß 42,35 multiplíziren, der ganze Multiplikand mit der folgenden Stelle des Multiplikators, nämlich mit 5 Hunderteln multiplizirt, würde sieben Dezimalstellen geben, also hat man nur 42,3 zu multipliziren u. s. f. für jede folgende Ziffer des Multiplikators immer um eine Stelle weniger im Multiplikand zu nehmen.

Hat man demnach den Multiplikator so unter den Multiplikand geschrieben, daß die Einer (7) unter 6, die Zehntel (2) unter 5, die Hundertel (5) unter 3 kommen u. s. f., so beginne man die Multiplikation mit jener Ziffer des Multiplikanden, welche über der Ziffer des Multiplikators steht, mit welcher man multiplizirt. Da nun jedes Theilprodukt so viele Dezimalstellen hat als verlangt sind, so schreibe man die letzten Stellen unter einander. Ehe man jedoch die einzelnen Produkte entwickelt, multiplizire man mit jeder Ziffer des Multiplikators die rechts von der über ihr stehende des Multiplikanden, schreibe das erhaltene Produkt aber nicht an, sondern zähle bloß die Zehner der erhaltenen zweiziffrigen Zahl zu dem nachfolgenden Produkte, und berücksichtige dabei die Regel, welche im § 47 gegeben wurde.

Man hat demnach:

1) 42,35649 × 7,2531

```
 42,35649
 13 527
 ───────
 296 495  . . . .  7 × 4 = 28, Correktur 3
   8 471  . . . .  2 × 6 = 12,     "     1
   2 118  . . . .  5 × 5 = 25,     "     3
     127  . . . .  3 × 3 =  9,     "     1
       4
 ───────
 307,215
```

2) 45,0379 × 258,2435 für drei Dezimalstellen

```
 45,03790
  5342852
 ─────────
  9007580
  2251895
   360303  . . . .  8 × 9 = 72, Correktur 7
     9007  . . . .  2 × 7 = 14,     "     1
     1801  . . . .  4 × 3 = 12,     "     1
      135  . . . .
       23  . . . .  5 × 5 = 25,     "     3
 ─────────
 11630,744
```

3) 1425,021 × 0,0435 für 2 Stellen

```
 1425,021
   534
 ────────
   5700
    428  . . . .  3 × 5 = 15 Correktur 2
     71  . . . .  5 × 2 = 10     "     1
 ────────
  61,99
```

Es folgt hieraus für die abgekürzte Multiplikation der Dezimalbrüche die Regel:

Man schreibe die Einer des Multiplikators unter diejenige Stelle des Multiplikanden, mit welcher das Produkt abgebrochen werden soll, setze die Zehner, Hunderter ꝛc. ꝛc. nach rechts, die Zehntel Hundertel ꝛc. ꝛc. nach links unter die folgenden Stellen des Multiplikanden, so daß der Multiplikator in umgekehrter Ordnung angeschrieben ist. Hierauf werden die Theilprodukte gebildet, indem man mit jeder Ziffer des Multiplikators multiplizirt, jedoch nicht den ganzen Multiplikanden, sondern mit der Ziffer beginnt, welche über der Ziffer des Multiplikators steht, mit welcher multiplizirt wird, nach links fort-

fährt, und die rechts folgende Ziffer des Multiplikanden zur Correktur benützt. Die Theilprodukte werden unter einander geschrieben, wie die Summanden bei der Addition von Zahlen, und dann in der Summe so viele Dezimalstellen abgeschnitten, als von vornherein verlangt sind.

Ungeachtet der Correktur kann die letzte Stelle ungenau sein; will man dieselbe genau erhalten, so entwickelt man eine Dezimalstelle mehr als verlangt werden; sind z. B. im Produkte vier Stellen verlangt, so rechne man, als ob fünf gefordert wären.

D. Division.

§ 50.

1) Auch beim Dividiren kann man abkürzen, nachdem man nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren sämmtliche Zifferstellen des Dividenden in Rechnung gebracht hat und zwar dadurch, daß man anstatt dem Reste eine Null anzuhängen im Divisor die letzte Stelle rechts wegstreicht u. s. f. für die weiteren Divisionen, wobei jedoch beim Multipliziren die Correktur (nach dem vorhergehenden §) berücksichtigt werden muß.

Z. B. a) 4,630285 : 0,0473
= 46302,85 : 473 = 97,8918, wofür aber, weil die
3732 nächste Ziffer größer
4218 als 4 werden würde,
4345 97,8919 zu schreiben ist.
88 : 47(3)
41 : 4(7)

b) 53,02 : 0,589234
= 53020000 : 589234 = 89,98123
5881280
578174 : 58923(4)
530311 . . . . 9 × 4 = 36, Correktur 4
47863 : 5892(3)
47138 . . . . 8 × 3 = 24, Correktur 2
725 : 589(2)
589
136 : 58(9)
118 . . . . 2 × 9 = 18, Correktur 2
18 : 5(8)

2) Soll der Quotient nur bis auf eine bestimmte Stelle gesucht werden, so ist es manchmal nicht nothwendig, alle Ziffern des Dividenden und Divisors in Rechnung zu ziehen. Aus den vorhergehenden Beispielen ergibt sich nämlich, daß bei dem Abstreichen der Ziffern des Divisors durch die Division mit der höchsten Stelle des Divisors die letzte Stelle des Quotienten, durch die Division mit den beiden höchsten Stellen des Divisors die vorletzte Stelle des Quotienten erhalten wird, u. s. f. Bestimmt man also zuerst die Anzahl der Zifferstellen vor dem Komma und addirt zu dieser die Anzahl der verlangten Dezimalstellen, so erhält man die Anzahl der für die Rechnung nothwendigen Stellen für den Divisor und ebenso für den Dividenden.

Soll z. B. in der Aufgabe 928,73954 : 9,35876 der Quotient bis auf Tausendtel gesucht werden, so sieht man, daß die erste Stelle des Quotienten Zehner gibt, also erhält man zwei Stellen vor dem Komma, dazu drei Dezimalstellen gibt fünf Ziffern für den Divisor und, weil 92 die Zahl 93 nicht als Summand enthält, sechs Ziffern für den Dividenden. Daher hat man:

928740 : 9358,7 (6)	= 99,238	für 99,237 (nach 1) a.)
86452	9 × 6 = 54,	Correktur 5
2224	9 × 7 = 63,	„ 6
352	2 × 8 = 16,	„ 2
71	3 × 5 = 15,	„ 2

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich für die abgekürzte Division der Dezimalbrüche folgende Regel:

Man bestimme, wie viele Zifferstellen der Quotient vor dem Komma erhält, und zähle dazu die Anzahl der zu suchenden Dezimalstellen. Dadurch erhält man die Anzahl der für die Rechnung nothwendigen Stellen des Divisors. Der Dividend hat entweder ebenso viele Stellen oder um eine mehr, je nachdem der Divisor in der Zahl, welche aus der gleichen Anzahl von Ziffern des Dividenden (von links nach rechts gezählt) gebildet wird, enthalten ist, oder nicht. Hierauf dividire man, streiche nach jeder Division die letzte Ziffer des vorigen Divisors weg und bringe jedesmal die Correktur in Rechnung.

Z. B. a) Es soll der Quotient 7,2 : 0,4287655 auf Hundertel berechnet werden.

Die höchste Ziffer des Quotienten gibt Zehner, man erhält daher zwei Ziffern vor dem Komma und eben so viele nach demselben. Es sind daher für den Divisor vier Ziffern, und, weil 4 in 7 enthalten ist, ebenso viele für den Dividend nothwendig. Die Rechnung erhält demnach folgende Form:

7200 :	428,7 (6) = 16,79		
2912	1 × 6 = 6,	Correktur	1
340	6 × 7 = 42,	"	4
40	7 × 8 = 56,	"	6
38	9 × 2 = 18,	"	2

b) Es soll der Quotient 4536,3295 : 82,35 auf Zehntausendtel berechnet werden.

Man erhält hier im Quotienten vor dem Komma drei Stellen und eben so viele nach demselben. Es sind daher vom Divisor sechs, und, weil 8 in 4 nicht enthalten ist, vom Dividenden 7 Ziffern in die Rechnung aufzunehmen. Weil aber der Divisor nur 4 Ziffern enthält, so sind entweder demselben drei Nullen anzuhängen, oder es ist das Abstreichen erst zu beginnen, nachdem drei Stellen des Quotienten gefunden sind. Man erhält daher:

453633,0 : 8235 = 55,0859 wofür (nach 1) a) 55,0860 zu schreiben ist. (§ 47 Anm. 3.)

41883			
7080			
492	8 × 5 = 40	Correktur	4
80	5 × 3 = 15	"	2
6	9 × 2 = 18	"	2

3) Der Quotient 4,2 : 5173 soll auf fünf Dezimalstellen entwickelt werden.

Hier kommt die erste geltende Ziffer des Quotienten an die Stelle der Zehntausendtel zu stehen, folglich sind nur zwei Stellen des Divisors und drei des Dividenden in Rechnung zu ziehen.

0,0420 : 541 (7) = 0,00081

Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß man mit unendlichen Dezimalbrüchen nur nach dem im vorstehenden Paragraphe entwickelten Verfahren rechnen kann, sowie daß die Anzahl der für das Resultat zu fordernden Stellen bei jeder Rechnung mit benannten Zahlen von der Natur der Aufgabe abhängt. So z. B. würde man, wenn das Resultat die Benennung Mark hätte,

für dasselbe höchstens zwei Dezimalstellen berechnen. Denn bei Berücksichtigung der Correktur kann der Fehler, welcher durch Weglassung der dritten Dezimalstelle entsteht, höchstens fünf Tausendtel betragen. Nun sind aber $^{5}/_{1000}$ Mk. = $^{500}/_{1000}$ Pf. = $^{1}/_{2}$ Pf., ein Betrag, welcher wegen des Fehlens einer solchen Münze im Leben keine Berücksichtigung finden kann.

Sechste Abtheilung.

Schluß-Rechnung.

I. Einfache Regeldetri.

§ 51. (48.)

1) Hängt eine Größe von einer andern so ab, daß ein Vielfaches der einen dem gleichen Vielfachen der andern entspricht, so heissen die beiden Größen gerade oder direkt proportional.

Z. B. Wenn 1 ℔ einer Waare 24 Pf. kostet,
so kosten 2 ℔ dieser Waare 2×24 Pf. = 48 Pf.
" " 3 ℔ " " 3×24 Pf. = 72 Pf. u. s. f.
oder, wenn 100 fl. Kapital 5 fl. Zins tragen, so erhält man von 1000 fl. Kapital 10 × 5 fl. = 50 fl. Zins u. s. f.

Direkt proportional sind demnach:
Gewicht und Preis einer Waare,
Kapital und Zinsen, ferner
Arbeitskräfte und geleistete Arbeit ꝛc.

Entspricht aber ein Vielfaches der einen Größe dem ebensovielten Theile der andern, so heissen diese Größen indirekt oder umgekehrt proportional.

Z. B. Wenn 1 Arbeiter zu einer gewissen Arbeit 60 Tage braucht,
so brauchen 2 " " derselben " $^{60}/_{2}$ Tage = 30 Tg.
3 " " " " $^{60}/_{3}$ " = 20 Tg.
u. s. f. (bis zu einer gewissen Grenze), oder wenn mit einem gewissen Vorrath 100 Mann 30 Tage leben können, so reichen

200 Mann $^{30}|_2$ Tage = 15 Tage
1000 „ $^{30}|_{10}$ „ = 3 „ u. s. f.

Demnach sind indirekt proportional:

Zahl der Arbeiter und Zeit, in welcher eine Arbeit fertig wird,
„ „ Consumenten und Zeit, in welcher ein Vorrath verzehrt wird, u. s. f.

Anmerkung. Es gibt Größen, welche von einander abhängen jedoch nicht auf eine der beiden besprochenen Arten, z. B. die Anzahl der angespannten Pferde und der in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Weg, die Tiefe eines Brunnens und Zeit der Vollendung, Zeit und Weg beim Fallen eines Körpers, Höhe eines Berges und Barometerstand auf demselben 2c. 2c.

2) Sind zwei zusammengehörige Werthe proportionaler Größen, dann ein beliebiger Werth der einen Größe gegeben, und soll der entsprechende Werth für die andere Größe gesucht werden, so heißt die Aufgabe eine einfache Regeldetri-Aufgabe.

Z. B. 7 ℔ einer Waare kosten 2 Mk., was kosten 56 ℔ dieser Waare?

Die beiden zusammengehörigen Werthe sind 7 ℔ und 2 Mk., der beliebige Werth der einen 56 ℔; der entsprechende Werth für die andere Größe soll gesucht werden, und kann mit x bezeichnet werden; oder:

100 Mann reichen mit einem bestimmten Vorrathe 40 Tage; wie lange werden 400 Mann mit demselben Vorrathe reichen?

100 Mann und 40 Tage sind die zusammengehörigen Werthe, 400 Mann der beliebige Werth der einen, x Tage der entsprechende Werth der anderen Größe.

Jede Regeldetri-Aufgabe besteht aus 2 Theilen, nämlich aus einem Bedingungssatze und einem Fragesatze. Den Bedingungssatz bilden die beiden bekannten zusammengehörigen Werthe, der Fragesatz enthält den beliebigen Werth der einen und den entsprechenden gesuchten Werth der anderen Größe, also in den beiden obigen Aufgaben ist:

In der ersten
der Bedingungssatz: 7 ℔ kosten 2 Mk.
der Fragesatz: 56 ℔ „ x „

In der zweiten
Bedingungssatz: 100 Mann reichen 40 Tage.
Fragesatz: 400 „ „ x „

Anmerkung. Bei jeder Regelbetri-Aufgabe müssen alle Nebenumstände, die im Bedingungs- und Fragesatze nicht erwähnt sind, als gleich vorausgesetzt werden.

II. Lösung der Regeldetri-Aufgaben durch Schlüsse.

§ 52. (49.)

Es seien folgende Aufgaben gegeben:

1) Von einer Waare kosten 45 ℔ 420 Mk., wie hoch kommen 33 Pfund?

Bedingungssatz: 45 ℔ kosten 420 Mk.
Fragesatz: 33 ℔ " x Mk.

Wenn 45 ℔ 420 Mk. kosten, so muß 1 ℔ den 45. Theil von 420 Mk. kosten, nämlich $^{420}|_{45}$ Mk., also 33 ℔ 33 mal so viel, d. i.

$$x = \frac{420}{45} \times 33 = \frac{420 \times 33 \;.\; 28 \;.\; 11}{45 \;.\; 15} = 308 \text{ (Mk.)}$$

2) Zu einem Baue brauchen 24 Mann 28 Tage, wie lange werden 14 Mann dazu brauchen?

Bedingungssatz: 24 Mann brauchen 28 Tage.
Fragesatz: 14 " " x Tage.

Wenn 24 Mann 28 Tage brauchen, so würde ein Mann, da derselbe den 24. Theil leistet, 24mal so lang arbeiten müssen, d. h. er würde 24 × 28 Tage brauchen, 14 Mann dagegen brauchen den 14. Theil der Zeit, somit brauchen 14 Mann

$$x = \frac{24 \times 28}{14} = 24 \times 2 = 48 \text{ (Tage)}.$$

3) Ein Kapital von 1300 Mark ist zu 5% ausgeliehen, was betragen die jährlichen Zinsen?

Bedingungssatz: 100 Mark Kapital tragen 5 Mk. Zinsen
Fragesatz: 1300 " " " x Mk.

Wenn 100 Mark Kapital 5 Mark Zinsen tragen, so würde 1 Mark Kapital den hundertsten Theil, d. h. $^{5}|_{100}$ Mark (= 5 Pf.) Zinsen, und 1300 Mark Kapital 1300 mal so viel tragen, und man hat

$$x = \frac{5 \times 1300}{100} = 5 \times 13 = 65 \text{ (Mark)}.$$

Aus diesen drei Aufgaben ist ersichtlich, daß man bloß von der bekannten Größe für eine bestimmte Mehrheit auf jene, welche der Einheit entspricht, und von der für die Einheit gefundenen Zahl auf die verlangte Mehrheit überzugehen hat. Dieses geschieht durch Multiplikation oder Division, was in jedem einzelnen Falle leicht zu finden ist.

Anmerkung. Um von einer Mehrheit auf eine andere überzugehen, ist es nicht immer nothwendig, inzwischen auf die Einheit zu schließen. Wenn nämlich die beiden Mehrheiten einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so wählt man am besten diesen selbst zum Übergange, besonders beim Kopfrechnen. So oben im Beispiel 1) 3 Pfund, im Beispiel 2) 2 Mann, im Beispiel 3) wird man unmittelbar von einhundert auf dreizehnhundert schließen.

III. Zusammengesetzte Regeldetri.

§ 53. (50.)

Hat man es mit mehr als zwei proportionalen Größen zu thun, so muß die einfache Regeldetri mehrmals angewendet werden, und die Aufgabe heißt eine zusammengesetzte Regeldetri (regula quinque, septem etc.).

Z. B. 1) 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 20 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wie lange würden 20 Arbeiter, die täglich $7\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, zu dieser Arbeit brauchen?

Bedingungssatz: 12 Arbeiter, 10 Stunden tägl., 20 Tage
Fragesatz: 20 „ $7\frac{1}{2}$ „ „ x „

12 Arbeiter brauchen 20 Tage, also 1 Arbeiter 12mal so viel, nämlich 12 × 20 Tage, und 20 Arbeiter den 20. Theil der Zeit d. i. $\frac{12 \times 20}{20}$; so viele Tage brauchen aber die 20 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wenn sie aber täglich nur 1 Stunde arbeiten, so brauchen sie 10mal so viel Zeit d. i. $\frac{12 \times 20}{20} \times 10$ Tage, und wenn sie $7\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, $7\frac{1}{2}$ mal weniger Zeit; mithin

$$x = \frac{12 \times 20 \times 10 \,.\, 2}{20 \times 15} = 16 \text{ (Tage).}$$

2) 25 Mann können in 6 Tagen, wenn sie täglich 11 Stunden arbeiten, einen Graben auswerfen. Wie viele Arbeiter wären nothwendig, wenn ein gleich großer Graben in 10 Tagen bei täg-

lich 9stündiger Arbeitszeit ausgeworfen werden sollte, aber in einem Erdreiche, wo 5 Cm Erde auszuwerfen eben so viel Zeit erfordert, als im anderen Erdreiche 6 Cm?

Bedingungssatz:	25 Mann,	6 Tage,	11 Stunden täglich,	6 Cm
Fragesatz:	x „	10 „	9 „	„ 5 Cm

Soll der Graben in 6 Tagen fertig werden, so braucht man 25 Mann, wenn er aber in einem Tage fertig werden soll, 6mal so viel, also 6×25, und in 10 Tagen den 10. Theil, d. i. $\frac{6 \times 25}{10}$; so viele Arbeiter sind nothwendig, wenn täglich 11 Stunden gearbeitet wird. Es sind bei einer Stunde Arbeitszeit 11mal so viel, und bei 9 Stunden der 9. Theil nothwendig, also $\frac{6 \times 25 \times 11}{10 \times 9}$; so viele Arbeiter braucht man, wenn in einer bestimmten Zeit 6 Cm Erde ausgeworfen werden; wird aber in derselben Zeit nur 1 Cm ausgeworfen, so sind 6mal so viel Arbeiter, und wenn 5 cm ausgeworfen werden, der 5. Theil nothwendig. Man hat daher

$$x = \frac{6 \times 25 \times 11 \times 6}{10 \times 9 \times 5} = 22 \text{ (Arbeiter).}$$

3) Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 2100 Thalern in 12 Jahren, wenn 150 Thaler Kapital in 7 Jahren 42 Thaler Zinsen tragen?

Bedingungssatz:	150 Thlr. Kapital,	7 Jahre,	42 Thlr. Zinsen
Fragesatz:	2100 „ „	12 „	x „ „

150 Thlr. Kapital tragen 42 Thlr. Zinsen, also 1 Thlr. Kapital $^{42}|_{150}$ in sieben Jahren, folglich in einem Jahre $^{42}|_{150} \times 7$, dann tragen 2100 Thlr. Kapital in einem Jahre $\frac{42 \times 2100}{150 \times 7}$ und in 12 Jahren $\frac{42 \times 2100 \times 12}{150 \times 7} = 1008$ (Thaler).

Die zusammengesetzten Regeldetri-Aufgaben werden also ebenso wie die einfachen gelöst, indem man von der Mehrheit des Bedingungs-Satzes auf die Einheit und von dieser auf die Mehrheit des Fragesatzes übergeht. —

Siebente Abtheilung.

A. Von den Proportionen.

§ 54. (51.)

1) Sind vier Zahlen so beschaffen, daß der Quotient aus einem Paare gleich ist dem Quotienten aus dem anderen Paare, so sagt man, die vier Zahlen stehen in Proportion. Z. B. aus den vier Zahlen 12, 6, 14, 7 lassen sich die beiden gleichen Quotienten 12 : 6 und 14 : 7 bilden, also stehen diese vier Zahlen in Proportion.

Man schreibt: 12 : 6 = 14 : 7 und liest: 12 verhält sich zu 6, wie 14 zu 7, d. h. ist der erste Dividend doppelt so groß als der erste Divisor, so muß der zweite Dividend auch das Doppelte des zweiten Divisors sein Eine Proportion ist also die Gleichsetzung (Gleichung) zweier gleicher Quotienten. —

Die in Proportion stehenden vier Zahlen heissen Glieder der Proportion.

Anmerkung. Man nennt auch die Gleichsetzung zweier gleicher Differenzen eine Proportion, und zwar im Gegensatze zu der eben erklärten, welche dann eine geometrische genannt wird, eine arithmetische.

2) Jeden dieser Quotienten nennt man Verhältniß, und zwar nennt man den Dividenden das Vorderglied, den Divisor das Hinterglied; es sind also in jeder Proportion das 1. und 3. Glied die Vorderglieder, das 2. und 4 Glied die Hinterglieder.

Zusatz 1. Ist das Vorderglied eines Verhältnisses größer als das Hinterglied, so nennt man das Verhältniß fallend, im entgegengesetzten Falle steigend.

Zusatz 2. Ein steigendes Verhältniß ist (als ein ächter Bruch) kleiner als 1, ein fallendes (als unächter Bruch) größer als 1. —

3) Das 1. und 4. Glied einer Proportion werden äussere, das 2. und 3. innere oder mittlere Glieder genannt.

Die beiden Vorderglieder und ebenso die beiden Hinterglieder heissen auch homologe oder gleichnamige Glieder. —

4) Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, so heißt die Proportion stetig, ausserdem diskret.

Z. B. 9 : 36 = 36 : 144 ist eine stetige Proportion, die in 1) angeführte eine diskrete.

Anmerkung. 1) Das vierte Glied einer diskreten Proportion heißt vierte, das dritte Glied einer stetigen Proportion dritte, und das mittlere Glied einer stetigen Proportion mittlere Proportionale zu den übrigen Gliedern.

Anmerkung. 2) Die mittlere Proportionale bei einer stetigen arithmetischen Proportion nennt man auch arithmetisches, bei einer geometrischen, geometrisches Mittel.

Anmerkung. 3) Es ist leicht einzusehen, daß das arithmetische Mittel für zwei Zahlen die halbe Summe derselben ist. Analog spricht man auch von einem arithmetischen Mittel, Durchschnitts- oder Mittelwerthe für mehrere Zahlen und versteht darunter den Quotienten aus der Summe dieser Zahlen und ihrer Anzahl.

§ 55. (52.)

Multiplizirt man in einer Proportion den Dividenden des ersten Quotienten mit dem Divisor des zweiten, und den Dividenden des 2. Quotienten mit dem Divisor des 1., so sind diese beiden Produkte einander gleich. Denn nach der Erklärung vom Dividiren ist jeder Dividend gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten; wird also der Dividend des 1. Quotienten mit dem Divisor des 2. multiplizirt, so erhält man ein Produkt, das gleich ist dem Produkte aus folgenden drei Faktoren: aus dem 1. Quotienten, dem Divisor des 1. und dem Divisor des 2. Quotienten. — Das Produkt aus dem Dividenden des 2. und dem Divisor des 1. Quotienten ist aber aus demselben Grunde gleich dem Produkte aus folgenden 3 Faktoren: aus dem 2. Quotienten, dem Divisor des 2. und dem Divisor des 1. Die beiden Quotienten sind, weil sie eine Proportion bilden, einander gleich, also auch die beiden Produkte, weil sie aus gleichen Faktoren gebildet sind. Wird nun auf obige Benennung Rücksicht genommen, so heißt der oben angeführte für die Proportionslehre sehr wichtige Satz: In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem Produkte der inneren.

Z. B. für 4 : 20 = 7 : 35
ist $4 \times 35 = 20 \times 7$

Zusatz. Aus diesem Satze folgt umgekehrt, daß sich aus zwei gleichen Produkten von je zwei Faktoren eine Proportion bilden läßt, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu äussern, die des anderen zu inneren Gliedern macht.

Z. B. aus $7 \times 9 = 3 \times 21$
folgt $7 : 3 = 21 : 9$

§ 56. (53.)

Ist in einer Proportion irgend ein Glied unbekannt, welches wir mit irgend einem Buchstaben wie x, y, z bezeichnen wollen, so kann dasselbe mittelst des im vorhergehenden Paragraph bewiesenen Satzes auf die folgende Weise gefunden werden.

Hat man z. B.

a) $4 : 16 = 6 : x$, so muß
$4 \times x = 16 \times 6$ sein, d. h. das vierfach gesuchte Glied ist gleich dem Produkte 16×6, folglich das Glied selbst der vierte Theil von 16×6, also ist

$$x = \frac{16 \times 6}{4} = 24$$

b) $3 : x = 7 : 35$, so ist wieder
$7 \times x = 3 \times 35$, d. h. das siebenfach gesuchte Glied ist 3×35, also das gesuchte Glied selbst der siebente Theil von 3×35, somit $x = \frac{3 \times 35}{7} = 15$

Vergleicht man diese beiden Resultate, so folgt die Regel:

In jeder Proportion wird ein äusseres Glied gefunden, wenn man das Produkt der inneren Glieder durch das bekannte äussere dividirt, und ein inneres Glied, wenn man das Produkt der äusseren durch das bekannte innere dividirt.

§ 57. (54.)

Da (nach § 55) eine Proportion richtig ist, so lange das Produkt der äusseren Glieder jenem der inneren gleich ist, so kann man folgende Vertauschungen der Glieder vornehmen:

a) In jeder Proportion lassen sich die inneren Glieder und ebenso auch die äusseren vertauschen [permutiren].

Z. B. 2 : 10 = 3 : 15 gibt auch
2 : 3 = 10 : 15, oder
15 : 10 = 3 : 2, oder endlich
15 : 3 = 10 : 2.

b) In jeder Proportion lassen sich gleichzeitig beide Verhältnisse umkehren [invertiren], d. h. in jedem Verhältnisse Vorderglied und Hinterglied vertauschen.

Z. B. 3 : 21 = 11 : 77, gibt auch
21 : 3 = 77 : 11.

Zusatz. Daraus folgt, daß vier verschiedene, in Proportion stehende Zahlen wie 2, 6, 5 und 15, acht Proportionen geben, nämlich

2 : 6 = 5 : 15	6 : 2 = 15 : 5
2 : 5 = 6 : 15	6 : 15 = 2 : 5
15 : 6 = 5 : 2	5 : 2 = 15 : 6
15 : 5 = 6 : 2	5 : 15 = 2 : 6

§ 58. (55.)

Aus dem im vorhergehenden Paragraphe angeführten Grunde darf man die Glieder jeder Proportion auf folgende Weise ändern:

a) In jeder Proportion darf man ein äusseres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliziren oder dividiren.

Z. B. 6 : 24 = 2 : 8; das 1. und 2. Glied durch 6 dividirt, gibt
1 : 4 = 2 : 8, oder das 1. u. 3. „ „ 2 „ „
3 : 24 = 1 : 8; „ 2. „ 4. „ mit 5 multiplizirt „
6 : 120 = 2 : 40 u. s. f.

b) In jeder Proportion darf man alle vier Glieder mit derselben Zahl multipliziren oder dividiren.

Z. B. 9 : 45 = 6 : 30; jedes Glied durch 3 dividirt gibt
3 : 15 = 2 : 10; „ „ mit 2 multiplizirt gibt
18 : 90 = 12 : 60.

Anmerkung. Mit Hilfe dieser beiden Regeln lassen sich Proportionen vereinfachen, namentlich können dadurch die Brüche entfernt werden. Z. B.

a) $^7/_6 : {}^5/_9 = 6 : x$; das 1. und 2. Glied mit 18 multiplizirt gibt:
21 : 10 = 6 : x.

b) $^7/_{15} : {}^9/_{10} = {}^4/_3 : {}^{18}/_7$; das 1. und 2. Glied mit 30, das 3. und 4. mit 21 multiplizirt gibt:
14 : 27 = 28 : 54.

§ 59. (56.)

Aus den beiden Proportionen

$$\begin{array}{l} 4 : 8 = 5 : 10 \text{ und} \\ 7 : 21 = 3 : 9 \text{ folgt} \\ \hline 4 \times 10 = 8 \times 5 \\ 7 \times 9 = 21 \times 3 \end{array}$$

Werden nun die unter einander stehenden Produkte mit einander multiplizirt, so müssen die neu erhaltenen Produkte einander gleich sein, weil die Faktoren gleich sind, somit hat man:

$$4 \times 10 \times 7 \times 9 = 8 \times 5 \times 21 \times 3$$ oder (§ 11. Anmkg.)

$$(4 \times 7) \times (10 \times 9) = (8 \times 21) \times (5 \times 3)$$

und daraus (nach § 52, Zus.):

$$(4 \times 7) : (8 \times 21) = (5 \times 3) : (10 \times 9),$$

d. h. wenn man diese Proportion mit den beiden gegebenen vergleicht:

Aus zwei Proportionen läßt sich eine neue bilden, wenn man die einander entsprechenden Glieder multiplizirt.

Dieses gilt ebenso für mehrere Proportionen, und die neu erhaltene Proportion heißt in beiden Fällen eine **zusammengesetzte**.

Z. B. die Proportionen

$$\begin{array}{l} 5 : 15 = 2 : 6 \\ 3/5 : 1/8 = 7 : 35/24 \\ 1 : 16 = 3 : 48 \text{ geben:} \\ \hline (5 \times 3/5 \times 1) : (15 \times 1/8 \times 16) = (2 \times 7 \times 3) : (6 \times 35/24 \times 48) \\ 3 : 30 = \quad : 420 \end{array}$$

Zusatz 1. Soll aus 2 Proportionen, welche ein gleiches Glied haben, eine zusammengesetzte Proportion gebildet werden, so kann man die beiden Proportionen zuerst so umstellen, daß das gemeinsame Glied in der einen Proportion ein äusseres, in der anderen ein inneres wird, welche beiden gleichen Glieder bei der Multiplikation weggelassen werden können. (§ 58, a.)

Z. B. Die Proportionen

$$\begin{array}{l} 5 : 10 = 7 : 14 \text{ und} \\ 28 : 7 = 12 : 3 \text{ geben:} \\ \hline 5 : 10 = \not{7} : 14 \\ 12 : 3 = 28 : \not{7} \\ \hline (5 \times 12) : (10 \times 3) = 28 : 14 \\ 60 : 30 = 28 : 14. \end{array}$$

Zusatz 2. Soll aus den beiden Proportionen:

$$2 : y = 7 : 5 \text{ und}$$
$$x : y = 6 : 11$$

die Unbekannte x gefunden werden, so ist es nicht nothwendig, zuerst y aus der 1. Proportion zu suchen, den gefundenen Werth in die zweite einzusetzen und dann erst x zu suchen, sondern man stellt beide Proportionen (nach Zus. 1.) um, und bildet eine zusammengesetzte:

$$2 : y = 7 : 5 \text{ und}$$
$$x : y = 6 : 11 \text{ geben}$$
$$7 : 5 = 2 : y \text{ und}$$
$$11 : 6 = y : x$$
$$77 : 30 = 2 : x \text{ und daraus}$$
$$x = \frac{30 \times 2}{77} = \frac{60}{77}.$$

Zusatz 3. Ebenso verfährt man bei mehreren Proportionen, welche paarweise dieselbe Unbekannte haben.

Z. B.
$$3 : 7 = 5 : v$$
$$14 : 9 = v : z$$
$$12 : 11 = z : y$$
$$22 : 6 = y : x$$
$$(3 \times 14 \times 12 \times 22) : (7 \times 9 \times 11 \times 6) = 5 : x$$
$$8 : 3 = 5 : x$$
$$x = {}^{15}/_{8} = 1\,{}^{7}/_{8}.$$

Solche Proportionen werden kürzer auf folgende Art geschrieben:

$$\left.\begin{array}{r} 3 : 7 \\ 14 : 9 \\ 12 : 11 \\ 22 : 6 \end{array}\right\} = 5 : x$$

§ 60. (57.)

Die Proportion $4 : 12 = 7 : 21$ (α) geht (nach § 57, a) über in $4 : 7 = 12 : 21$ (β), und kann nach der Erklärung von den Proportionen geschrieben werden:

$${}^{4}/_{7} = {}^{12}/_{21};$$

wird zu beiden Seiten 1 addirt, wodurch die Gleichheit nicht aufgehoben wird, so erhält man:

$${}^{4}/_{7} + 1 = {}^{12}/_{21} + 1,$$

oder, wenn man auf jeder Seite den allgemeinen Nenner für dieselbe herstellt:

$$\frac{4+7}{7}=\frac{12+21}{21},$$ oder nach der Erklärung

v. d. Proport. $(4+7):7=(12+21):21$, und (nach § 54, a)

$(4+7):(12+21)=7:21$ oder $=4:12$ (α)

d. h. in Bezug auf die Proportion α:

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; oder in Bezug auf die Proportion β:

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des einen Verhältnisses zur Summe der Glieder des anderen, wie zwei homologe Glieder.

Ebenso gelten diese Sätze für die Differenzen der genannten Glieder.

Zusatz. Hat man mehrere gleiche Verhältnisse, wie, $5:10=11:22=7:14$ ꝛc. ꝛc., so nennt man sie in dieser Form geschrieben eine fortlaufende Proportion und erhält nach dem Vorhergehenden aus der Proportion:

$5:10=11:22$, die Proportion:

$(5+11):(10+22)=5:10$, oder, was dasselbe:

$(5+11):(10+22)=7:14$, und daraus nach dem Vorhergehenden:

$(5+11+7):(10+22+14)=7:14=5:10=11:22$ d. h.

Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. —

B. Anwendung der Proportionslehre auf Regeldetri-Aufgaben.

I. Einfache Regeldetri-Aufgaben.

§ 61. (58.)

Es ist gefragt:

1) Wie viel Zins erhält man von 800 Mk. Kapital in einem Jahre zu 5%?

Bedingungssatz: 100 Mk. Kapital 5 Mk. Zins
Fragesatz: 800 Mk. „ x „ „

Kapital und Zinsen sind direkt proportionale Größen, d. h. einem Vielfachen des Kapitals entspricht das gleiche Vielfache der Zinsen, also 8 mal so viel Kapital gibt 8 mal so viel Zins mithin müssen die Quotienten (Verhältnisse), die aus den Kapitalien und aus den Zinsen in derselben Ordnung [beide Glieder aus dem Bedingungssatze entweder als Dividenden (Vorderglieder), oder als Divisoren (Hinterglieder)] gebildet werden, einander gleich sein, also hat man die Proportionen:

100 Mk. Kapital : 800 Mk. Kapital = 5 Mk. Zins : x Mk. Zins, oder
800 „ „ 100 „ „ = x „ „ : 5 „ „

Läßt man die Benennungen weg, weil Verhältnisse nur durch unbenannte Zahlen ausgedrückt werden, und nur mit unbenannten Zahlen allgemein gerechnet werden kann, so erhält man:

$$100 : 800 = 5 : x, \text{ oder}$$
$$800 : 100 = x : 5, \text{ und daraus}$$
$$x = \frac{800 \times 5}{100} = 40,$$

wobei sich die Benennung des Resultates jedesmal aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt. —

2) 100 Mann reichen mit einem gewissen Vorrathe 40 Tage; wie lange werden 400 Mann damit reichen?

Bedingungssatz: 100 Mann 40 Tage
Fragesatz: 400 „ x „

Da die hier vorkommenden beiden Größen umgekehrt proportional sind, d. h. das Vielfache der einen Größe dem ebenso-

vielten Theile der anderen entspricht, so werden die Quotienten, die aus den Zahlen für die Consumenten und die Tage gebildet werden, nur dann einander gleich sein, wenn man sie in verkehrter Ordnung (das eine Glied aus dem Fragesatze als Hinterglied, das andere als Vorderglied) bildet. Man hat demnach

100 Mann : 400 Mann = x Tage : 40 Tagen oder
400 „ : 100 „ = 40 „ : x „

und ohne Benennung:

$$400 : 100 = 40 : x$$

woraus $x = \frac{100 \times 40}{400} = 10$ folgt.

Anmerkung. Die Unbekannte setzt man gewöhnlich an die vierte Stelle.

Aus den vorhergehenden Beispielen ergeben sich folgende zwei Regeln für den Ansatz einer Regelbetriaufgabe in Form einer Proportion:

a) Man untersuche, ob die Größen direkt oder indirekt proportional sind, bilde dann aus den Zahlen der gleichbenannten Größen im ersten Falle zwei Verhältnisse in derselben Ordnung, im zweiten Falle in umgekehrter Ordnung, und setze die Quotienten einander gleich. Ist also x an der 4., das ihm gleichbenannte Glied aus dem Bedingungssatze an der 3. Stelle, so kommt bei direkt proportionalen Größen die bekannte Zahl aus dem Fragesatze an die 2., bei indirekt proportionalen an die 1. Stelle.

b) Man bilde aus dem Frageglied und dem mit ihm gleichbenannten Gliede des Bedingungssatzes ein Verhältniß, überlege, ob dasselbe steigend oder fallend ist, und bilde dann aus den beiden andern Zahlen ebenfalls ein steigendes oder fallendes Verhältniß. Denn da die Verhältnisse einer Proportion einander gleich sind, so müssen beide zugleich entweder steigend oder fallend sein.

II. Maßreduktionen.

§ 62. (59.)

Wie Maßreduktionen durch Proportionen gelöst werden, läßt sich aus folgenden Aufgaben ersehen:

1) Wie viele bayerische Fuß geben 100 würtembergische Fuß, wenn der bayer. Fuß sich zum würtemb. Fuß wie 129,38 : 127 verhält?

Aus der Proportion:

1 bay. Fuß : 1 würt. Fuß = 129,38 : 127 folgt, daß 127 × 1 bayer. Fuß = 129,38 × 1 würt. Fuß, oder, was dasselbe ist, 127 bayer. Fuß = 129,38 würt. Fuß (§ 52).

Es heißt demnach der Fragesatz: x bayer. Fuß 100 würt. Fuß
und der Bedingungssatz : 127 „ „ 129,38 „ „

$$129{,}38 : 100 = 127 : x$$

$$x = \frac{100 \times 127}{129{,}38} = 98{,}1 \ldots.$$

2) Wie viele bayerische Eimer geben 50 preußische Eimer, wenn ein bayerischer Eimer 64,1416 Liter und ein preußischer Eimer 68,702 Liter hält?

Da der bayerische Eimer 64,1416 und der preußische 68,702 Liter hält, so verhält sich

1 bayer. Eimer : 1 preußisch. Eimer = 64,1416 : 68,702 daher sind 68,702 bayr. Eimer = 64,1416 preuß. Eimern (§ 55).

Fragesatz : x bayerische Eimer 50 preußische Eimer
Bedingungssatz : 68,702 „ „ 64,1416 „ „

$$64{,}1416 : 50 = 68{,}702 : x$$

$$x = \frac{50 \times 68{,}702}{64{,}1416} = 53{,}555$$

(statt 53,55497 . . . . § 50. Anmerk.)

3) Wie viele Gulden nach der süddeutschen Währung geben 100 dänische Reichsbankthaler, wenn 39,5543 Reichsbankthaler auf ein Zollpfund feinen Silbers gehen?

Nach der süddeutschen Währung gehen $52\frac{1}{2}$ fl. auf ein Zollpfund feinen Silbers, nach der dänischen Währung gehen 39,5543 Thaler auf ein Zollpfund, also geben $52\frac{1}{2}$ fl. südd. Währung 39,5543 dänische Reichsbankthaler.

Fragesatz : x fl. südd. Währ. 100 dän. R.-B.-Thlr.
Bedingungssatz : $52\frac{1}{2}$ fl. „ „ 39,5543 „ „ „

$$39{,}5543 : 100 = 52\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{105 \times 100}{2 \cdot 39{,}5543} = 132{,}731.$$

III. Lösung zusammengesetzter Regeldetri-Aufgaben durch Proportionen.

§ 63. (60.)

Jede zusammengesetzte Regeldetriaufgabe läßt sich in einfache Regeldetriaufgaben zerlegen, wie in folgendem Beispiele gezeigt wird.

Wenn 12 Weber bei 10stündiger täglicher Arbeitszeit in 27 Tagen 30 Stück Leinwand verfertigen, wie lange werden 15 Weber bei 9stündiger täglicher Arbeitszeit zu 40 Stück Leinwand brauchen?

Bedingungssatz:	12 Weber	10 Stunden tägl.	30 Stück	27 Tage
Fragesatz:	15 „	9 „	„ 40 „	x „

Vergleicht man immer nur ein paar proportionaler Größen, so erhält man folgende einfache Regeldetriaufgabe:

1) Wie lange braucht man zu 40 Stück, wenn man zu 30 Stück 27 Tage braucht? (bei 10 Stunden Arbeitszeit und 12 Webern.)

Bedingungssatz: 27 Tage 30 Stück
Fragesatz: z „ 40 „

a) $30 : 40 = 27 : z$

z Tage braucht man zu 40 Stück bei 10 Stunden Arbeitszeit; es soll aber gesucht werden, wie lange gebraucht wird bei 9 Stunden Arbeitszeit: also hat man

2) Wie lange braucht man bei 9 Stunden Arbeitszeit, wenn man bei 10 Stunden z Tage braucht? (12 Arbeiter.)

Bedingungssatz: z Tage 10 Stunden Arbeitszeit
Fragesatz: y „ 9 „ „

b) $9 : 10 = z : y.$

y Tage braucht man zu 40 Stück bei 9 Stunden täglicher Arbeitszeit; allein so lange brauchen 12 Weber; es soll aber gesucht werden, wie lange 15 Weber brauchen, somit hat man:

3) Wie lange brauchen 15 Weber, wenn 12 Weber y Tage brauchen?

Bedingungssatz: y Tage 12 Weber
Fragesatz: x „ 15 „

c) $15 : 12 = y : x.$

x Tage brauchen 15 Weber bei 9 Stunden täglicher Arbeitszeit zu 40 Stück.

Um x zu finden, geben die 3 Proportionen a, b, c:

$$30 : 40 = 27 : z$$
$$9 : 10 = z : y$$
$$15 : 12 = y : x,$$ folglich (nach § 56 Zus. 3.)

$$\text{d)}\ \left.\begin{matrix} 30 : 40 \\ 9 : 10 \\ 15 : 12 \end{matrix}\right\} = 27 : x$$

und daraus

$$x = \frac{(40 \times 10 \times 12) \times 27}{(30 \times 9 \times 15)} = 32.$$

Die Vergleichung dieser zusammengesetzten Proportion d mit der gegebenen Aufgabe gibt folgende Regel:

Man bilde nach der Lehre der einfachen Regelbetri mit dem Frageverhältniß [dem gesuchten Gliede und dem ihm gleichnamigen] und jedem Paare der gleichbenannten Zahlen nach einander Proportionen ohne Rücksicht auf die übrigen gegebenen Größen. Die dadurch erhaltenen Verhältnisse aus den gleichbenannten Zahlen mit dem Frageverhältnisse zu einer zusammengesetzten Proportion verbunden geben dann die gesuchte Zahl x.

Z. B. Mit 4 Fässern Fleisch können 50 Mann auf einem Schiffe, wenn jeder täglich 240 Gramm erhält, 7 Wochen ausreichen. Wie lange können 40 Mann mit 8 Fässern ausreichen, wenn jeder Mann täglich 280 Gramm erhält?

Bedingungssatz:	4 Fässer	50 Mann	240 Gramm	tägl.	7 Wochen.
Fragesatz:	8 „	40 „	280 „	„	x „

$$\left.\begin{matrix} 280 : 240 \\ 40 : 50 \\ 4 : 8 \end{matrix}\right\} = 7 : x$$

a) Erhält der Mann täglich 240 Gramm, so reicht man 7 Wochen, wie lange wird man reichen, wenn er 280 Gramm erhält? Die Größen sind umgekehrt proportional, also schreibt man 280 : 240 (oder: da 7 : x ein fallendes Verhältniß ist, so muß man auch 280 : 240 als ein fallendes Verhältniß anschreiben.)

b) 50 Mann können 7 Wochen ausreichen, wie lange werden 40 reichen? Indirekt proportionale Größen, folglich 40 : 50 (oder: 7 : x steigend, folglich auch 40 : 50 steigend).

c) Mit 4 Fässern reicht man 7 Wochen, wie lange mit 8

Fässern? Direkt proportionale Größen, folglich 4 : 8 (oder: 7 : x steigend, mithin auch 4 : 8 steigend).

Daraus $x = \frac{7 \times 240 \times 50 \times 8}{280 \times 40 \times 4} = 15.$

IV. Kettenregel.

§ 64. (61.)

Es sei die Aufgabe gegeben:

Wie viele bayerische Ellen betragen 5893 Hamburger Ellen, da 7 russische Ellen gleich sind 9 Leipziger, 57 Wiener ebensoviel als 78 Hamburger 56 bayerische Ellen, 83 Leipziger und 71 Wiener 78 russische geben?

In dieser Aufgabe sollen Hamburger Ellen in bayerische verwandelt werden, es ist uns also ein Verhältniß zwischen Hamburger und bayerischen Ellen nothwendig. Ein solches ist aber nicht gegeben, sondern durch mehrere sogenannte Zwischenverhältnisse dargestellt, durch welche man das Verlangte auf folgende Weise erhalten kann:

x bayerische Ellen geben 5893 Hamburger,
wenn 78 Hamburger Ellen = 57 Wiener
71 Wiener " = 78 russischen,
7 russische " = 9 Leipziger,
83 Leipziger " = 56 bayerischen Ellen.

Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt:

78×1 Hamburger $= 57 \times 1$ Wiener,
71×1 Wiener $= 78 \times 1$ russischen,
7×1 russische $= 9 \times 1$ Leipziger,
83×1 Leipziger $= 56 \times 1$ bayerischen, und aus diesen gleichen Produkten erhält man (nach § 52, Zus.) die Proportionen:

1 H. : W. = 57 : 78
1 W. : r. = 78 : 71
1 r. : L. = 9 : 7
1 L. : b. = 56 : 83

Diese vier Proportionen, zu einer zusammengesetzten (nach § 59, Zusatz 3.) verbunden, geben:

1 H. : b. = (57 × 78 × 9 × 56) : (78 × 71 × 7 × 83), oder 78×71×7×83 Hamburger Ellen = 57 × 78 × 9 × 56 bayerische Ellen.

Man hat also den Bedingungssatz in der Form, wie er zu einer einfachen Regeldetri-Aufgabe nothwendig ist, nämlich:

Fragesatz: x bayer. Ellen 5839 Hamburger Ellen.
Bedingungssatz: 57 × 78 × 9 × 56 bayer. Ellen 7 8×71×7×83 Hamburger Ellen.

Die Größen sind direkt proportional, daher erhält man:
78×71×7×83 : 5893 = 57×78×9×56 : x und daraus

$$x = \frac{5893 \times 57 \times 78 \times 9 \times 56}{78 \times 71 \times 7 \times 83}$$

Macht man nun den Theilstrich dieses Quotienten statt horizontal vertikal, setzt rechts den Dividenden des Quotienten, links x und den Divisor, so erhält man, wenn man jeder dieser Zahlen ihre Benennung gibt, folgende Form:

bayer. Ellen	x	5893	Hamb. Ellen
Hamb.	78	57	Wiener
Wiener	71	78	russisch.
russische	7	9	Leipzig.
Leipziger	83	56	bayr.

und daraus folgende Regel:

Um eine Aufgabe nach der Kettenregel zu lösen, setze man das unbekannte Glied links zu oberst, ihm rechts gegenüber das Frageglied, hierauf links immer das gleichnamige von dem rechts vorhergehenden und rechts das gleichwerthige von dem in derselben Zeile links stehenden, bis das letzte Glied rechts dieselbe Benennung hat, wie das oberste links. Das Produkt der Zahlen rechts bildet den Dividenden, das Produkt der Zahlen links den Divisor jenes Quotienten, wodurch x ausgedrückt ist.

Diese Lösungsart heißt auch Reesischer Ansatz, und wird hauptsächlich bei Münz-, Maß- und Gewicht-Reduktionen angewendet, wenn das Verhältniß der Größen im Fragesatz nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch gegebene Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß. —

Obwohl jede Regeldetri-Aufgabe nach dem Reesischen Ansatze, natürlich nur nach einer neu abzuleitenden Regel, gelöst werden könnte, so thut man doch besser, den Reesischen Ansatz auf Aufgaben, wie die oben gelöste, und auf Regeldetri-Aufgaben mit direkt proportionalen Größen zu beschränken.

Z. B. 1) Wie viele Pfennige kostet 1 Dgr., wenn $1^5/_8$ Ztr. 406 Mk. 25 Pf. kosten?

Pfennige	x	1	Dgr.
Dgr.	10	1	Hgr.
Hgr.	10	1	Kgr.
Kgr.	50	1	Ztr.
Ztr.	$1^5/_8$	$406^1/_4$	Mk.
Mk.	1	100	Pf.

$$x = \frac{1625 \times 100 \times 8}{4 \times 10 \times 10 \times 50 \times 13} = 5 \text{ (Pf.)}$$

2) Ein Weinwirth erhält 325 österreichische Maß Wein, und bezahlt dafür 260 österreichische Gulden. Wie viele Pfennige kostet das Liter, wenn sich die österreichische Maß zum Liter verhält, wie 7 : 5, und er 19 % gewinnen will?

Verkauf Pf.	x	1 Liter
Liter	7	5 österr. Maß
österr. M.	325	260 österr. fl.
österr. fl.	1	2 Mk.
Mk.	1	100 Pf.
Einkauf Pf.	100	119 Pf. Verkauf.

$$x = \frac{5 \times 260 \times 2 \times 100 \times 119}{7 \times 325 \times 100} = 136 \text{ (Pf.} = 1 \text{ Mk. } 36 \text{ Pf.)}$$

V. Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung.

§ 65. (62.)

1) Soll eine Zahl in mehrere ungleiche Theile nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so heißt die Aufgabe eine Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung.

Man habe die Aufgabe:

420 fl. sollen unter drei Personen so vertheilt werden, daß sich die Theile zu einander verhalten, wie 3 : 5 : 7. —

Die letztere Bedingung könnte auch noch so ausgedrückt werden, daß, so oft die erste Person 3 fl. erhält, die zweite Person 5 fl. und die dritte Person 7 fl. bekommt. Wollte man diese Theilung wirklich vornehmen, so könnte Dieß dadurch geschehen, daß man der ersten Person 3 fl., der zweiten Person 5 fl. und der dritten Person 7 fl. gibt, hierauf das Verfahren wiederholt, und auf diese Art fortfährt, bis die ganze Summe vertheilt ist. Da nun jedesmal 3 + 5 + 7 fl. = 15 fl. zur Vertheilung kommen, so erhält die erste Person so oft 3 fl., die zweite so oft 5 fl. und die dritte so oft 7 fl., als sich die Zahl 15 von 420 wegnehmen läßt, oder so oft 15 in 420 enthalten ist. Somit erhält also

die erste $\frac{420}{15} \times 3 = 28 \times 3 = 84$

" zweite $\frac{420}{15} \times 5 = 28 \times 5 = 140$

" dritte $\frac{420}{15} \times 7 = 28 \times 7 = \frac{196}{420}$

Auch mit Hilfe der Proportionen kann die Aufgabe gelöst werden und zwar auf folgende Art:

Bezeichnet man die gesuchten Theile mit x, y, z, so hat man nach der Bedingung der Aufgabe:

$x : y = 3 : 5$
$y : z = 5 : 7$ oder (nach § 57, a)
$x : 3 = y : 5$ und
$y : 5 = z : 7$, daher
$x : 3 = y : 5 = z : 7$, und (nach § 60, Zus.)
$(x+y+z) : (3+5+7) = x : 3 = y : 5 = z : 7$,
oder da $x + y + z$ die zu vertheilende Zahl 420 vorstellt:
$420 : (3 + 5 + 7) = x : 3$
$420 : (3 + 5 + 7) = y : 5$
$420 : (3 + 5 + 7) = z : 7$, und daraus

$$x = \frac{420}{3+5+7} \times 3 = 84$$

$$y = \frac{420}{3+5+7} \times 5 = 140$$

$$z = \frac{420}{3+5+7} \times 7 = 169$$

dasselbe, was oben erhalten wurde.

Daraus ergibt sich folgende Regel:

Soll eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen in Theile zerlegt werden, so erhält man diese dadurch, daß man die zu theilende Zahl durch die Summe der Verhältnißzahlen dividirt und den erhaltenen Quotienten mit jeder Verhältnißzahl multiplizirt.

2) Müssen die Verhältnißzahlen erst gesucht werden, so nehme man eine davon, und zwar diejenige, nach welcher die übrigen am leichtesten bestimmt werden können, beliebig an, wobei diese am besten so gewählt wird, daß Brüche vermieden werden.

Z. B. Unter die drei ersten Schüler einer Klasse sollen am Ende des Schuljahres 35 fl. so vertheilt werden, daß der Zweite halb so viel als der Erste, und der Dritte halb soviel als der Zweite erhält; wie viel erhält jeder?

Nimmt man als Verhältnißzahl für den Antheil des Ersten 4, so ist die Verhältnißzahl für den Zweiten $^4|_2 = 2$
und für den Dritten $^2|_2 = 1$,

folglich der Antheil des 1. $= \frac{35}{4+2+1} \times 4 = 20$

" " " " 2. $= {}^{35}|_7 \times 2 = 10$

" " " " 3. $= {}^{35}|_7 \times 1 = 5.$

3) Sind die Verhältnißzahlen Brüche, so bringe man sie auf gleichen Nenner und theile im Verhältniß der Zähler.

Z. B. Es soll die Zahl 364 in 3 Theile zerlegt werden, die sich verhalten wie $^5|_6 : {}^3|_2 : 2$. Für die Brüche ist der allgemeine Nenner 6, die entsprechenden Zähler sind: 5, 9, 12; da $5+9+12 = 26$, so hat man

1. Theil $= \frac{364}{26} \times 5 = 70$

2. " $= \frac{364}{26} \times 9 = 126$

3. " $= \frac{364}{26} \times 12 = \frac{168}{364}$

Anmerkung. Haben die Verhältnißzahlen einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann derselbe von vornherein weggelassen werden.

4) Werden die Verhältnißzahlen durch das Zusammenwirken mehrerer Umstände bedingt, so heißt die Aufgabe zusammengesetzte Gesellschafts- oder Repartitions-Aufgabe.

Z. B. Zu einem gemeinsamen Unternehmen gab A 6000 Mk. auf 3 Jahre, B 4000 Mk. auf 5 Jahre; sie machten einen Gewinn von 5700 Mk. Wie viel erhielt jeder?

A gab 6000 Mk. auf 3 Jahre, wofür er denselben Gewinnantheil erhält, als wenn er 18000 Mk. auf 1 Jahr hergegeben hätte; B gab 4000 Mk. auf 5 Jahre, oder 20000 Mk. auf 1 Jahr, folglich sind die Verhältnißzahlen für

$$\left.\begin{array}{l} A\ 18000 \\ B\ 20000 \end{array}\right\} \text{(gleiche Faktoren bleiben weg)}$$

$$\begin{array}{lr} A & 9 \\ B & \underline{10} \\ & 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5700 : 19 = 300 \\ A = 300 \times 9 \ \ = 2700 \\ B = 300 \times 10 = \underline{3000} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 5700 \end{array}$$

VI. Vermischungs- oder Alligations-Rechnung.

§ 66. (63.)

Werden Gegenstände (Ingredienzien) von verschiedenen Preisen und in verschiedenen Mengen (Quantitäten) vermischt, so entstehen drei Arten von Aufgaben, deren Lösung den Namen Vermischungs- oder Alligations-Rechnung führt.

1) Es kann nach dem Werthe der Mischungseinheit gefragt werden, wenn die Preise der zu mischenden Ingredienzien nebst ihren Quantitäten gegeben sind.

Z. B. Ein Weinwirth mischt 30 Liter Wein, das Liter zu 48 Pf., mit 45 Liter, das Liter zu 96 Pf., und gießt noch 5 Liter Wasser dazu; wie hoch kommt das Liter dieser Mischung?

Um den Preis der Mischungseinheit zu finden, muß der Preis der ganzen Mischung und die Anzahl der Mischungseinheiten bekannt sein.

Preis von 30 Liter zu 48 Pf.	=	$30 \times 0{,}48$ Mk.	=	14,4 Mk.
„ „ 45 „ „ 96 „	=	$45 \times 0{,}96$ „	=	43,2 „
„ „ 5 „ „ 0 „	=	5×0 „	=	0 „
80 Liter kosten				57,6 „

folglich kostet 1 Liter $\frac{5760}{80}$ Pf. = 72 Pf.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise wie der Preis für die Mischungseinheit wird auch der Durchschnittspreis oder Mittelpreis berechnet. (§ 54, Anmerk. 3.)

2) Man kann, wenn die Quantität der Mischung und die Verhältnißzahlen, nach welchen die einzelnen Bestandtheile gemischt werden sollen, gegeben sind, nach den Quantitäten der Ingredienzien fragen.

Z. B. Um eine gewisse Art Pulver zu bereiten, müssen 16 Gewichtstheile Salpeter, 2 Theile Schwefel und 3 Theile Kohle genommen werden. Wie viel hat man von jedem dieser Stoffe nothwendig, um $26\frac{1}{4}$ Ztnr. Pulver zu erhalten?

Es soll hier die Zahl $26\frac{1}{4}$ Ztnr. oder 2625 ℔ in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 16 : 2 : 3, daher hat man (nach § 65):

$$16 + 2 + 3 = 21$$

$$2625 : 21 = 125$$

Salpeter	$= 125 \times 16$ ℔ $= 2000$ ℔	$= 20$ Ztnr.
Schwefel	$= 125 \times 2$ ℔ $= 250$ ℔	$= 2\frac{1}{2}$ Ztnr.
Kohle	$= 125 \times 3$ ℔ $= 375$ ℔	$= 3\frac{3}{4}$ Ztnr.
		$26\frac{1}{4}$ Ztnr.

Diese Art von Mischungsaufgaben gehört zu den Theilungsaufgaben.

3) Sollen aus dem Preise der Mischung und den Preisen der Ingredienzien die Verhältnißzahlen, nach welchen dieselben gemischt werden sollen, oder ihre Quantitäten gesucht werden, so hat man die eigentliche Alligationsrechnung.

a) Wenn nur zwei Sorten gemischt werden, ergibt sich das Verfahren aus der Betrachtung von folgender Aufgabe:

Ein Weinwirth hat zweierlei Weine, von dem einen kostet das Liter 2 Mark 20 Pf., von dem andern 1 Mark 30 Pf.; er will diese beiden Sorten so mischen, daß das Liter der Mischung 1 Mark 90 Pf. werth ist; in welchem Verhältniß muß dieß geschehen?

Von der 1. Sorte kostet das Liter 2 Mark 20 Pf. = 220 Pf.
" " 2. " " " " 1 " 30 " = 130 "

Von der Mischung soll das Liter 1 Mark 90 Pf. = 190 Pf. kosten, also kostet jedes Liter der theureren Sorte 30 Pf. mehr und jedes Liter der wohlfeileren Sorte 60 Pf. weniger, als ein Liter der Mischung.

Es muß demnach in einem solchen Verhältnisse gemischt werden, daß das Mehr des besseren Weines durch das Weniger des geringeren ausgeglichen wird. Dieses ist der Fall, wenn das Produkt aus dem Mehr (30 Pf.) und der entsprechenden Verhältnißzahl

gleich ist dem Produkte aus dem Weniger (60 Pf.) und der zugehörigen Verhältnißzahl, weil dann für die eine Sorte ebensoviel mehr, als für die andere weniger bezahlt wird. Diese Gleichheit wird erreicht, wenn 30 Pf. mit 60 und 60 Pf. mit 30 multiplizirt werden, folglich muß in dem Verhältnisse von 60 : 30, oder (nach § 65, 3) Anmerk.) von 2 : 1 gemischt werden. Dieses Resultat erhält man auf folgende Weise:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Sorte } 220\\ \text{2. Sorte } 130\end{array}\right\}\text{ Mischung } 190\quad\begin{array}{l}190 - 130 = 60;\ 2\\ 220 - 190 = 30;\ 1\end{array}$$

es trifft auf 2 Liter der 1. Sorte 1 Liter der 2., und man erhält folgende Regel:

Der Unterschied zwischen dem Preise der Mischung und dem Preise der wohlfeileren Sorte gibt die Verhältnißzahl für die theurere Sorte, und der Unterschied zwischen dem Preise der theureren Sorte und jenem der Mischung gibt die Verhältnißzahl für die wohlfeilere Sorte.

Z. B. Ein Silberarbeiter will aus 10- und 15-löthigem Silber 6 Pfund und 125 Gramm 13-löthiges zusammenschmelzen; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

$$\left.\begin{array}{l}10\\ 15\end{array}\right\}13\ \begin{array}{l}15 - 13 = 2\\ 13 - 10 = 3\end{array}$$
(Verhältnißzahl für das 10-löth. Silber),
(" " " 15- " "),

es müssen also 6 Pfund und 125 Gramm im Verhältnisse von 2 : 3 getheilt werden.

6 ℔ 125 Gramm $= 6^1/_4$ ℔ $= {}^{25}/_4$ ℔
$2 + 3 = 5$
${}^{25}/_4 : 5 = {}^5/_4$.

Vom 10-löthigen Silber braucht er ${}^5/_4 \times 2 = 2^1/_2$ ℔ = 2 ℔ 250 Gramm; vom 15-löthigen Silber ${}^5/_4 \times 3 = 3^3/_4$ ℔ = 3 ℔ 375 Gramm.

b) Hat man mehr als zwei Sorten zu mischen, so sind verschiedene Verhältnißzahlen möglich, welche der Aufgabe entsprechen.

Z. B. Ein Weinwirth hat dreierlei Weine, das Liter zu 2 Mark 16 Pf., zu 1 Mark 68 Pf. und zu 1 Mark 8 Pf. Er will diese 3 Sorten so mischen, daß das Liter 1 Mark 44 Pf. werth ist; in welchen Verhältnissen kann dieses geschehen?

α) Die verlangte Mischung könnte sowohl durch die 1. und 3. Sorte als durch die 2. und 3. hergestellt werden, nicht aber durch

die 1. und 2. Sorte, weil jede dieser beiden Sorten theurer ist, als die Mischung.

Für die 1. und 3. Sorte hätte man nach dem Vorhergehenden:

1. Sorte	2,16	1,44	1,44 — 1,08 = 0,36	oder	1
3. „	1,08		2,16 — 1,44 = 0,72		2,

es müßte also von der ersten Sorte immer 1 Liter, von der 3. Sorte 2 Liter genommen werden, und die Mischung wäre die verlangte.

Für die 2. und 3. Sorte folgt:

2. Sorte	1,68	1,44	1,44 — 1,08 = 0,36	oder	3
3. „	1,08		1,68 — 1,44 = 0,24		2,

je 3 Liter der 2. und je 2 Liter der 3. Sorte geben ebenfalls die verlangte Mischung.

Gießt man diese beiden Mischungen zusammen, so erhält man wieder eine Mischung, deren Preis der verlangte ist; dabei ist dann

von der 1. Sorte	1 Liter	also sind die Verhältnißzahlen	1
„ „ 2. „	3 „		3
„ „ 3. „	2 + 2 „		4

β) Daß noch andere Verhältnißzahlen möglich sind, kann auf folgende Weise gezeigt werden:

1. Sorte 2,16	1,44	Ein Liter d. 1. S. kostet 72 Pf. zu **viel**	in Bezug auf den Misch.-Preis;
2. „ 1,68		„ „ „ 2. „ „ 24 „ „ „	
3. „ 1,08		„ „ „ 3. „ „ 36 „ „ **wenig**	

wollte man also von der 1. und 2. Sorte gleich viel nehmen, so wäre, wenn man je ein Liter nähme, der Preis von zwei Liter dieser Mischung um 72 + 24 Pf. = 96 Pf. größer, als jener von 2 Liter der verlangten Mischung; mischt man nun damit die 3. Sorte, so muß das Weniger der 3. Sorte das Mehr aus den beiden anderen Sorten wieder ausgleichen; man nehme deshalb von der ersten und zweiten Sorte je 3, von der dritten Sorte 8 Liter, denn es ist dann 2 × 48 × 3 = 36 × 8, man hat also die Verhältnißzahlen: 3, 3, 8.

Wollte man von der 1. und 2. Sorte nicht gleich viel nehmen, so könnte man etwa von der zweiten und dritten Sorte gleichviel nehmen, ausserdem würden auch andere Verhältnißzahlen wie z. B.

1. Sorte	2. Sorte	3. Sorte	
2	3	6	
4	3	10	entsprechen, denn

2 Liter der 1. Sorte kosten	1,44 Mk.	mehr als	2 Liter der verlangten Misch.
3 „ „ 2. „ „	0,72 „	„ „	3 „ „ „ „
6 „ „ 3. „ „	2,16 „	weniger als	6 „ „ „

also ist das Mehr = dem Weniger.

Von der Richtigkeit der verschiedenen Verhältnißzahlen überzeugt man sich, wenn (nach 1.) der Preis der Mischung gesucht wird, welche mit diesen Verhältnißzahlen hergestellt wird.

Die gefundenen Verhältnißzahlen heissen also:

	a	b	c	d
für die 1. Sorte	1	3	2	4
„ „ 2. „	3	3	3	3
„ „ 3. „	4	8	6	10
	8	14	11	17

Die zuerst abgeleiteten sind offenbar die einfachsten, weil sie die kleinste Summe geben; das Auffinden derselben kann durch folgende Regel ausgedrückt werden:

Man stelle diejenigen Sorten paarweise zusammen, aus denen allein die verlangte Mischung gemacht werden könnte, und suche hierauf für jedes dieser Paare die Verhältnißzahlen (nach a), dann geben die Summen der Verhältnißzahlen von den Sorten, welche öfters vorkommen, die gesuchten Verhältnißzahlen.

Dieß gilt nicht bloß für drei Ingredienzien, sondern auch für mehrere.

Z. B. Ein Silberarbeiter will aus 9-löthigem, 10-löthigem, 12-löthigem und reinem Silber 11-löthiges herstellen. Von dem 9-löthigen hat er 4 ℔, welche er vollständig dazu benützen will; wie viel hat er von jeder anderen Sorte zu nehmen?

1. Sorte 9 ⟩ 11 ⟨ 1
2. „ 12 ⟩ 11 ⟨ 2

1. Sorte 9 ⟩ 11 ⟨ 5
4. „ 16 ⟩ 11 ⟨ 2

2. „ 10 ⟩ 11 ⟨ 5
4. „ 16 ⟩ 11 ⟨ 1

2. S. 10 ⟩ 11 ⟨ 1
3. S. 12 ⟩ 11 ⟨ 1

Verhältnißzahlen:

Für die 1. Sorte	1 + 5 = 6	2
2. „	1 + 5 = 6	2
3. „	2 + 1 = 3	1
4. „	2 + 1 = 3	1

Von der ersten Sorte will er 4 ℔ nehmen, welchen die Verhältnißzahl 2 entspricht, also treffen auf 1 als Verhältnißzahl zwei Pfund. Somit hat er zu nehmen

von der 2. Sorte 2 × 2 ℔ = 4 ℔
3. „ 1 × 2 „ = 2 „
4. „ 1 × 2 „ = 2 „

γ) Man sieht leicht, daß man auch brauchbare Verhältnißzahlen erhalten muß, wenn man die Verhältnißzahlen, welche man nach α für die Mischungen von je zwei Bestandtheilen erhalten hat, mit zwei, drei u. s. f. multiplizirt, und sie mit dem einfachen, doppelten, dreifachen u. s. w. der Verhältnißzahlen für die zweite, dritte 2c. 2c. Zusammenstellung von je zwei Bestandtheilen verbindet. Durch dieses Verfahren ist man in den Stand gesetzt, bei Mischung mehrerer Bestandtheile in solchen Fällen, in welchen das bisher angegebene Verfahren die Quantitäten der Bestandtheile nicht in ganzen Zahlen ausgedrückt gibt, letzteres zu erreichen, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen ist.

Ein Weinwirth hat dreierlei Wein, den Liter zu 1 fl. 48 kr., zu 1 fl. 24 kr. und zu 54 kr. Er will aus diesen drei Sorten ein Hektoliter so mischen, daß das Liter der Mischung 1 fl. 12 kr. werth ist.

Man hat nach S. 97 b)

I. a) 216 144 36 oder 1   II. b) 168 144 36 oder 3
c) 108 72 2   c) 108 24 2

Um ganze Zahlen für die Quantitäten der Bestandtheile zu erhalten, muß die Summe der Verhältnißzahlen entweder der Anzahl der verlangten Liter (100) gleich, oder in ihr ohne Rest enthalten sein, was mit den gefundenen Verhältnißzahlen nicht direkt, sondern nur dadurch erreicht werden kann, daß man je zwei zusammengehörige Verhältnißzahlen mit einem geeigneten Faktor multiplizirt. So erhält man, wenn man das erste Paar von Verhältnißzahlen mit fünf, das zweite mit zwei multiplizirt:

I. a) 5   II. b) 6
c) 10   c) 4

dadurch erhält man als Verhältnißzahl für die erste Sorte 5, für die zweite 6, für die dritte $10 + 4 = 14$

und hat $\frac{100}{5+6+14} = \frac{100}{25} = 4$; mithin die Anzahl der Liter für die erste Sorte 20, für die zweite 24, für die dritte 56.

Aus dieser Auflösung ergeben sich andere durch folgende Betrachtung:

Wollte eine Mischung zum Preise der Mittelsorte aus der

besten und geringsten hergestellt werden, so hätte man für die Herstellung der Verhältnißzahlen folgende Darstellung:

$$\begin{matrix} 216 & & 60 & & 5 \\ & 168 & & \text{oder} & \\ 108 & & 48 & & 4 \end{matrix}$$

Es können also für den Zweck der Aufgabe fünf Liter der besten und vier Liter der geringsten Sorte zusammen neun Liter der mittleren ersetzen. Man erhält daher aus der obigen Auflösung jedesmal eine neue Auflösung, so oft man zur Quantität der ersten Sorte fünf und zur dritten vier Liter addirt oder davon subtrahirt, wenn man gleichzeitig von der Quantität der zweiten Sorte neun Liter subtrahirt, beziehungsweise dazu addirt, so daß sich folgende Auflösungen ergeben:

I. Sorte	II. Sorte	III. Sorte
30	6	64
25	15	60
20 (5)	24 (9)	56 (4)
15	33	52
10	42	48
5	51	44

δ) Sind mehr als drei Bestandtheile gegeben, so kommt zu dem Vorhergehenden noch eine neue Modifikation wie in der Aufgabe:

Ein Essigfabrikant hat vier Sorten Essig, das Liter zu 9, 12, 18 und 24 Pf. Er will 60 Liter à 15 Pf. mischen; wie viel kann er von jeder Sorte nehmen?

und man hat folgende Darstellung:

a) 24 Pf. b) 18 Pf. c) 12 Pf. d) 9 Pf. Mischung 15 Pf.

$$\text{I.}\ \begin{matrix} \text{a)}\ 24 & & 3 & & 1 \\ & 15 & & \text{od.} & \\ \text{c)}\ 12 & & 9 & & 3 \end{matrix} \quad \text{II.}\ \begin{matrix} \text{a)}\ 24 & & 6 & & 2 \\ & 15 & & \text{od.} & \\ \text{d)}\ 9 & & 9 & & 3 \end{matrix} \quad \text{III.}\ \begin{matrix} \text{b)}\ 18 & & 3 & & 1 \\ & 15 & & \text{od.} & \\ \text{c)}\ 12 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

$$\text{IV.}\ \begin{matrix} \text{b)}\ 18 & & 6 & & 2 \\ & 15 & & \text{oder} & \\ \text{d)}\ 9 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

Da der Faktor, mit welchem man (nach γ) ein Paar zusammengehöriger Verhältnißzahlen in I, II, III oder IV multipliziren darf, vollkommen beliebig ist, so darf man als diesen Faktor auch Null nehmen, d. h. man darf ein Paar solcher Verhältnißzahlen weglassen. Thut man dieß in Bezug auf I (während man die übrigen Verhältnißzahlen ungeändert läßt), so erhält man folgende Verhältnißzahlen:

a) $0 + 2$ b) $1 + 2$ c) $0 + 1$ d) $3 + 1$
$\quad 2 \qquad\qquad 3 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 4$

und hat $\frac{60}{2+3+1+4} = \frac{60}{10} = 6$; mithin die Anzahl der Liter für die erste Sorte 12, für die zweite 18, für die dritte 6, für die vierte 24.

Aus dieser Auflösung kann man nach dem bei dem vorhergehenden Beispiele γ angegebenen Verfahren neue finden, wenn man eine Zahl, z. B. jene für die vierte Sorte ungeändert läßt, und zwar auf folgende Weise:

$$\begin{matrix} 8 & & 2 & & 1 \\ & 6 & & \text{oder} & \\ 4 & & 2 & & 1 \end{matrix}$$

So oft man also zur ersten und dritten Sorte je ein Liter addirt, oder davon subtrahirt, muß man von der zweiten Sorte zwei Liter subtrahiren, beziehungsweise dazu addiren und erhält dadurch folgende Auflösungen:

I. Sorte	II. Sorte	III. Sorte	IV. Sorte
7	28	1	24
8	26	2	24
9	24	3	24
10	22	4	24
11	20	5	24
12 (1)	18 (2)	6 (1)	24
13	16	7	24
14	14	8	24
15	12	9	24
16	10	10	24
17	8	11	24
18	6	12	24
19	4	13	24
20	2	14	24

Weitere Auflösungen erhält man, wenn man die Zahl der Liter für die I., II. oder III. Sorte unverändert läßt, sowie wenn man die Verhältnißzahlen anders bestimmt, und wieder in der oben ausgeführten Weise verfährt.

Achte Abtheilung.

Ketten-Brüche.

§ 67. (64.)

1) Ein Kettenbruch ist eine gemischte Zahl mit einem Bruche, dessen Nenner wieder eine gemischte Zahl, wobei der Nenner des zu ihr gehörenden Bruches ebenfalls wieder eine solche gemischte Zahl ist, u. s. f. entweder bis der Nenner des letzten Bruches eine ganze Zahl ist, oder ohne Ende.

Ist jeder Zähler dieser Brüche 1, so heißt der Kettenbruch ein einfacher, und nur solche werden im Folgenden betrachtet werden.

Solche Brüche sind:

$$3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{9}}}}} \quad \text{oder} \quad 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

2) Zunächst soll untersucht werden, wie jeder andere Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Es soll z. B. $^{212}/_{519}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden. Da der Zähler des Bruches 1 werden soll, ein Bruch aber seinem Werthe nach ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt, so wird man Zähler und Nenner durch 212 dividiren und erhält dann:

$$\frac{212}{519} = \frac{212 : 212}{519 : 212} = \cfrac{1}{2+\cfrac{95}{212}}$$

In dem neuen Bruche $\frac{95}{212}$ soll der Zähler wieder 1 werden, man muß daher Zähler und Nenner durch 95 dividiren u. s. f. für jeden neuen Bruch; somit erhält man folgende Darstellung:

$$\frac{212}{519}=\frac{212:212}{519:212}=\cfrac{1}{2+\cfrac{95}{212}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{95:95}{212:95}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{22}{95}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{22:22}{95:22}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{7}{22}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{7:7}{22:7}}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}}$$ folglich ist $$\frac{212}{519}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}}$$

Hat man $^{316}/_{95}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so zieht man zuerst die Ganzen heraus und verfährt dann wie im vorigen Beispiele:

$$\frac{316}{95}=3+\frac{31}{95}=3+\frac{31:31}{95:31}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{31}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{2:2}{31:2}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{2}}}$$

mithin $$\frac{316}{95}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{2}}}$$

Weil jeder Zähler 1, somit alle Zähler bekannt sind, so handelt es sich bloß um das Auffinden der Nenner. Aus der obigen Darstellung geht hervor, daß man den ersten Nenner des Kettenbruches erhält, wenn man den gegebenen Nenner durch den gegebenen Zähler dividirt, den zweiten Nenner des Kettenbruches, wenn man den neuen Nenner durch den neuen Zähler dividirt u. s. f.; da nun jeder neue Zähler der Rest der vorhergegangenen

Division, der neue Nenner aber der vorhergehende Zähler ist, so stimmt das Aufsuchen dieser Nenner mit dem Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Divisors überein, und man hat folgende Regel:

Um einen ächten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, dividire man den Nenner durch den Zähler, durch den erhaltenen Rest den vorhergegangenen Divisor u. s. f. immer durch jeden folgenden Rest den vorhergegangenen Divisor; die dabei sich ergebenden Quotienten sind die Nenner des gesuchten Kettenbruches.

Ist der gegebene Bruch ein unächter, so zieht man zuerst die Ganzen heraus.

Ist z. B. $\frac{91}{512}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man:

5	1	1	1	2	11	
512 : 91	: 57	: 34	: 23	: 11	: 1	mithin
57	34	23	11	1	0	

$$\frac{91}{512} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11}}}}}$$

Hat man $\frac{417}{73}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so ist

$$\frac{417}{73} = 5 + \frac{52}{73}$$

1	2	2	10	
73 : 52	: 21	: 10	: 1	demnach
21	10	1	0	

$$\frac{417}{73} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}}$$

3) Zur Verwandlung der Kettenbrüche in gemeine Brüche dient folgende Betrachtung:

Ist nachstehender Kettenbruch gegeben:

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}$$

so erhält man daraus, wenn man, mit den Ganzen anfangend, immer um einen Nenner weiter geht, nacheinander:

$$3;\quad 3+\frac{1}{4};\quad 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}};\quad 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}$$

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}$$

Verwandelt man diese Ausdrücke in gemeine Brüche, so hat man:

I. $\frac{3}{1}$

II. $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$

III. $3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}=3+\frac{5}{21}=\frac{68}{21}$

IV. $3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16}}=3+\frac{16}{67}=\frac{217}{67}$

V. $3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{7}{22}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{22}{117}}$

$$=3+\frac{117}{490}=\frac{1587}{490}$$

Die Brüche $^{3}/_{1}$, $^{13}/_{4}$, $^{68}/_{21}$, $^{217}/_{67}$ nähern sich dem Werthe des Kettenbruches $\frac{1587}{490}$; deßhalb nennt man sie Näherungs-Werthe des Kettenbruches.

Diese Näherungswerthe nebst dem Werthe des ganzen Kettenbruches $\frac{1587}{490}$, welchen man den wahren Werth des Ketten-Bruches nennt, lassen sich auf folgende Weise darstellen:

$$\overset{4}{\frac{3}{1}};\quad \overset{5}{\frac{13}{4}};\quad \overset{3}{\frac{68}{21}}=\frac{5\times 13+3}{5\times 4+1};$$

$$\overset{7}{\frac{217}{67}}=\frac{3\times 68+13}{3\times 21+4};\quad \frac{1587}{490}=\frac{7\times 217+68}{7\times 67+21}$$

Aus dieser Darstellung folgt ein Gesetz, wodurch man die Näherungsbrüche, sowie den wahren Werth eines Kettenbruches finden kann:

Man schreibe die Nenner des Kettenbruches der Ordnung nach neben einander, setze unter den ersten die Ganzen in Form eines Bruches, dessen Nenner 1, unter den folgenden jenen Bruch, der aus den Ganzen und dem Bruche, dessen Zähler 1, dessen Nenner der erste Nenner des Kettenbuches ist, auf gewöhnliche Weise sich ergibt; dann wird jeder folgende Näherungswerth erhalten, wenn man Zähler und Nenner des vorhergehenden Näherungswerthes mit dem darüber stehenden Nenner des Kettenbruches multiplizirt, und zu dem ersten Produkte den Zähler, zu dem andern den Nenner des vorhergehenden Näherungsbruches addirt.

Anmerkung. Hat man einen ächten Bruch, so kommt unter den ersten Nenner, da keine Ganzen vorhanden sind, nach obiger Regel: $\frac{0}{1}$.

Z. B. $$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4}}}}$$

$$\overset{2}{\frac{0}{1}};\quad \overset{3}{\frac{1}{2}};\quad \frac{3\times 1+0}{3\times 2+1}=\overset{5}{\frac{3}{7}};\quad \frac{5\times 3+1}{5\times 7+2}=\overset{4}{\frac{16}{37}};$$

$$\frac{4\times 16+3}{4\times 37+7}=\frac{67}{155}.$$

Anmerkung. Würde man dem ersten Näherungswerthe (den

Ganzen) die Formel $\frac{1}{0}$ vorschreiben, so könnte schon der zweite Näherungswerth durch dasselbe Verfahren wie die übrigen gefunden werden.

4) Von jedem Kettenbruche

z. B. $$4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}$$

ist der erste Näherungswerth ($^4|_1$) kleiner als der wahre Werth des Kettenbruches; denn der wahre Werth ist die Summe aus 4 und dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}$$

der zweite Näherungswerth, welcher sich aus $4 + \frac{1}{5}$ ergibt, ist größer als der wahre Werth; denn zum wahren Werth gehört statt des Nenners 5, der Nenner

$$5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}$$

je kleiner aber der Nenner bei ungeändertem Zähler ist, desto grösser ist der Werth des Bruches, also ist $4 + \frac{1}{5}$ größer als der wahre Werth. Ebenso findet man, daß der dritte Näherungswerth wieder kleiner ist als der wahre Werth, der vierte größer 2c.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt, daß die Näherungswerthe abwechselnd kleiner und größer sind als der wahre Werth des Kettenbruches, und zwar ist der erste Näherungswerth zu klein, der zweite zu groß, der dritte zu klein u. s. f.; oder die Näherungswerthe ungerader Ordnung (erster, dritter, fünfter 2c.) sind zu klein, die gerader Ordnung zu groß. Bei Kettenbrüchen ohne Ganze ist der erste Näherungswerth $^0|_1$.

Z. B. in dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

sind von den Näherungswerthen 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{64}{201}$, $\frac{327}{1027}$, $\frac{718}{2255}$ die Werthe 0, $\frac{7}{22}$, $\frac{327}{1027}$, kleiner und $\frac{1}{3}$, $\frac{64}{201}$ größer als der wahre Werth.

5) Wenn in dem Kettenbruche

$$4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}$$

welcher die Näherungswerthe $\frac{4}{1}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{46}{11}$, $\frac{159}{38}$, $\frac{205}{49}$, $\frac{1389}{332}$ hat, die Unterschiede von je zwei auf einander folgenden Näherungswerthen aufgesucht werden, indem man den kleinern von dem größern subtrahirt, so erhält man

für II — I: $\frac{21}{5} - \frac{4}{1} = \frac{21 - 20}{5 \times 1} = \frac{1}{1 \times 5}$

„ II — III: $\frac{21}{5} - \frac{46}{11} = \frac{231 - 230}{5 \times 11} = \frac{1}{5 \times 11}$

„ IV — III: $\frac{159}{38} - \frac{46}{11} = \frac{1749 - 1748}{11 \times 38} = \frac{1}{11 \times 38}$

„ IV — V: $\frac{159}{38} - \frac{205}{49} = \frac{7791 - 7790}{38 \times 49} = \frac{1}{38 \times 49}$

„ VI — V: $\frac{1389}{332} - \frac{205}{49} = \frac{68061 - 68060}{49 \times 332} = \frac{1}{49 \times 332}$

Verfährt man ebenso mit dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

dessen Näherungswerthe: $0, \frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{64}{201}, \frac{327}{1027}, \frac{717}{2225}$ sind, so erhält man:

$$\frac{1}{3} - \frac{0}{1} = \frac{1-0}{3 \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{22} = \frac{22-21}{3 \times 22} = \frac{1}{3 \times 22}$$

$$\frac{64}{201} - \frac{7}{22} = \frac{1408 - 1407}{22 \times 201} = \frac{1}{22 \times 201}$$

$$\frac{64}{201} - \frac{327}{1027} = \frac{65728 - 65727}{201 \times 1027} = \frac{1}{201 \times 1027} \text{ u. s. f.}$$

woraus man erkennt, daß der Unterschied zweier auf einander folgenden Näherungswerthe stets einem Bruche gleich ist, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner das Produkt der beiden Nenner ist. —

6) Subtrahirt man von einem Bruche, welcher gekürzt werden kann, z. B. von $\frac{7}{14}$, irgend einen andern, etwa $\frac{5}{11}$, so muß, wenn die Nenner beider Brüche relativ prime Zahlen sind, der durch Ausführung der Subtraktion erhaltene Bruch ebenfalls durch 7 gekürzt werden können: denn es ist

$$\frac{7}{14} - \frac{5}{11} = \frac{7 \times 11 - 5 \times 14}{14 \times 11} = \frac{7}{154}$$

7×11, 5×14 und 14×11 sind Vielfache von 7, mithin (wie aus § 28, 3 folgt) durch 7 theilbar, und ebenso die Differenz von zwei solchen Vielfachen, nämlich $7 \times 11 - 5 \times 14$ (§ 28, 2), also kann $\frac{7}{154}$ durch 7 gekürzt werden. Könnte man nun irgend einen Näherungswerth eines Kettenbruches kürzen, so müßte man auch die Differenz zwischen diesem Näherungswerthe und dem folgenden oder vorausgehenden ebenfalls kürzen können; da aber diese Differenz stets einem Bruche gleich ist, dessen Zähler 1 ist,

so kann diese Differenz, mithin auch der Näherungswerth nicht gekürzt werden; folglich sind die Näherungswerthe nicht reduzirbar. —

7) Sind $\frac{3}{7}$ und $\frac{16}{37}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, zwischen welchen (nach 4.) der wahre Werth des Kettenbruches liegen muß, so ist die Differenz der beiden Brüche $\frac{1}{7 \times 37}$. Sucht man nun die Differenz zwischen $\frac{16}{37}$ und irgend einem anderen Bruche, dessen Nenner kleiner ist, als der des ersten, z. B. $\frac{2}{5}$, so ist die Differenz von $\frac{2}{5}$ und $\frac{16}{37}$ größer als die vorige Differenz; denn der Nenner der letzteren Differenz ist 5×37, also kleiner als 7×37, somit der Bruch größer, weil der vorige Bruch den kleinsten möglichen Zähler hat, nämlich 1; es liegt also $\frac{3}{7}$ dem wahren Werthe näher als $\frac{2}{5}$, d. h. es kommen die Näherungswerthe dem wahren Werthe des Kettenbruches näher als jeder andere Bruch mit kleinerem Nenner. —

Anmerkung. Die Näherungswerthe für Kettenbrüche mit Ganzen können auch hergestellt werden, wenn man die Näherungswerthe für den Kettenbruch ohne Ganze sucht und zu den erhaltenen Resultaten die Ganzen wieder hinzusetzt.

8) Die Kettenbrüche werden vorzüglich dazu benützt, Brüche mit großen Nennern und Zählern, die man nicht vereinfachen kann, durch solche mit kleineren Zahlen möglich genau darzustellen.

Z. B. a) Wenn der Durchmesser eines Kreises 1 ist, so ist der Umfang desselben 3,1415926535 . . . .

$$3{,}1415926535 = 3\ \frac{1415926535}{10000000000}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \underline{\ 7\ } & & \underline{\ 15\ } & & \underline{\ 1\ } & & \underline{\ 292\ } & \\ 10000000000 & : & 1415926535 & : & 88514255 & : & 88212710 & : & 301545 \ldots \\ 88514255 & & 530783985 & & 301545 & & 2790371 & & \\ & & 88212710 & & & & 764660 & & \end{array}$$

$$3{,}1415926535 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 15 & 1 & 292 & \\ \dfrac{3}{1}, & \dfrac{22}{7}, & \dfrac{333}{106}, & \dfrac{355}{113}, & \dfrac{103993}{33102}, \ldots \end{array}$$

b) Eine bayerische Meile mißt 7415, eine englische Seemeile 1851,85 Meter; es soll dieses Verhältniß möglichst nahe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden.

bayer. Meile: engl. S.-M. = 7415 : 1851,85.

$$\frac{7415}{1851,85} = \frac{148300}{37037} = 4\frac{152}{37037}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 243 & & 1 & & 1 & & 1 & & 50 & \\ 37037 & : & 152 & : & 101 & : & 51 & : & 50 & : & 1 \\ 663 & & 51 & & 50 & & 1 & & & & \\ 557 & & & & & & & & & & \\ 101 & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{bayer. M. : engl. S.-M.} = 4 + \cfrac{1}{243 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{50}}}}}.$$

$$\begin{array}{cccccc} & 243 & 1 & 1 & 1 & 50 \\ \dfrac{4}{1}, & \dfrac{973}{243}, & \dfrac{977}{244}, & \dfrac{1950}{487}, & \dfrac{2927}{731}, & \dfrac{148300}{37037}. \end{array}$$

Anhang

über die

Maße, Gewichte und Münzen

des

metrischen Systems.

1. Grundlage.

Die Grundlage des neuen Maßes und Gewichtes ist das Meter (*μέτρον*). Das Meter ist nahezu der 40millionste Theil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridians.

Aus dem Meter sind alle übrigen Maße und Gewichte abgeleitet. Die Zahl 10 bildet die Reduktionszahl für die verschiedenen Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung dieses Längenmaßes und der von demselben abgeleiteten Flüssigkeitsmaße, sowie auch der Gewichte. Die Einheiten niedrigerer Ordnung erhalten ihre Benennung durch Vorsetzung der aus dem Lateinischen abgeleiteten Wörter Deci (decem, 10), Centi (centum, 100), Milli (mille, 1000), während die Einheiten höherer Ordnung aus dem Griechischen abgeleitete Wörter erhalten und zwar Deka (*δέκα*, 10), Hekto (*ἑκατόν*, 100), Kilo (*χίλιοι*, 1000), Miria (*μυρίοι*, 10000). —

2. Das Längenmaß.

Das Meter ist gleich 443,295936 pariser Linien.

Der zehnte Theil des Meters (m) heißt Decimeter (dm), der hundertste Centimeter (cm), der tausendste Millimeter (mm). Des Zehnfache des Meters heißt Dekameter (Dm), das Hundertfache Hektometer (Hm), das Tausendfache Kilometer (Km) und das Zehntausendfache Myriameter (Mm).

Hieraus ergibt sich folgende Uebersicht:

Mm.	Km.	Hm.	Dm.	m	dm.	cm.	mm.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000 =	10000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
			1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
				1 =	10 =	100 =	1000
					1 =	10 =	100
						1 =	10

3. Das Flächenmaß.

Die Einheit des Flächenmaßes ist das Quadratmeter, ein Quadrat, dessen Seite ein Meter lang ist. Quadratdecimeter, Quadratcentimeter, Quadratdekameter ꝛc. sind Quadrate, deren Seiten der Ordnung nach ein Decimeter, ein Centimeter, ein Dekameter ꝛc. lang sind.

Das Quadratdekameter heißt Ar (*ἄρουρα*, area), das Quadrathektometer Hektar.

Nach § 26, 1) ergibt sich bei diesem Flächenmaße für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung die Reduktionszahl 100, so daß man also hat:

Hektar (□ Hm.)	Ar (□ Dm.)	□m.	□dm.	□cm.	□mm.
1 =	100=	10000=	1000000=	100000000=	10000000000
	1=	100=	10000=	1000000=	100000000
		1=	100=	10000=	1000000
			1=	100=	10000
				1=	100

4. Das Körpermaß.

Die Einheit des Körpermaßes ist das Kubikmeter oder Ster, ein Würfel, dessen Kante ein Meter mißt. Kubikdecimeter, Kubikcentimeter &c. sind Würfel, deren Kanten ein Decimeter, Centimeter &c. lang sind.

Nach § 26, 4) ist bei diesem Körpermaße die Reduktionszahl für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung 1000, woraus sich ergibt:

Cm	Cdm	Ccm	Cmm
1 =	1000 =	1000000 =	1000000000
	1 =	1000 =	1000000
		1 =	1000

5. Das Hohlmaß für flüssige und trockene Gegenstände.

Als Einheit dient das Liter ($\lambda\acute{\iota}\tau\rho\alpha$, L.), dessen Inhalt ein Kubikdecimeter beträgt.

Die Reduktionszahl für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung ist, wie schon oben angegeben, 10. Daraus folgt die Uebersicht:

Kl.	Hl.	Dl.	L.	dl.	cl.	ml.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
			1 =	10 =	100 =	1000
				1 =	10 =	100
					1 =	10

6. Das Gewicht.

Als Einheit des Gewichtes dient das Gramm ($\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\alpha}\rho\iota o\nu$). Es ist dies das Gewicht eines Kubikcentimeters destillirten Wassers, gewogen im luftleeren Raume und bei einer Temperatur von 4° des hunderttheiligen Thermometers. 500 Gramm nennt man ein Pfund, 1000 Gramm ein Kilogramm, 50 Kilogramm oder 100 Pfund einen Zentner und 1000 Kilogramm oder 2000 Pfd. eine Tonne. Die Uebersicht ist folgende

Kgr.	Hgr.	Dgr.	Gr.	dgr.	cgr.	mgr.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
			1 =	10 =	100 =	1000
				1 =	10 =	100
					1 =	10

7. Die Münzen.

Die Münzeinheit ist die Mark (M.) = $\frac{1}{3}$ Thaler = 35 kr. süddeutsch. Sie wird in 100 Pfennige getheilt.

Verhältnißzahlen.

1. Längenmaße.

1 Meter = 3,426309598′ bayr.; 1′ bayr = 0,291859206 Met.;
1 Dcmt. = 4,111571517″ „ dd.; 1″ „ dd. = 2,43216005 Ctm.;
1 Cntm. = 4,933885820‴ „ dd.; 1‴ „ dd. = 2,02680004 Mllmt.;
1 Meter = 1,200458838 b. Ellen; 1 b. Elle = 0,833014817 Met.;
1 Klmt. = 0,26972443 b. Wegst.; 1 b. Wegst. = 3,7074874938 Klm.;
1 „ = 0,135000 geogr. Ml. 1 g. Meile = 7,40741 Klm.;
Nahezu sind: 7 Meter = 24′ bayer.; 5 Meter = 6 Ellen; 37 Kilometer = 10 Wegstunden.

2. Flächenmaße.

1 □ Meter = 11,739597461 □′ bayer.;
1 □ Dcmt. = 16,9050202 □″ b. dd.;
1 □ Cntm. = 24,343229 □‴ b. dd.;
1 Hektar = 2,93489936 bayer. Tagw.;
1 □′ bayer. = 0,085181796 □ Meter;
1 □″ b. dd. = 5,91540251 □ Centm.;
1 □‴ b. dd. = 4,107918 □ Millim.;
1 b. Tagw. = 34,07271845 Ar.
Nahezu sind 4 □ Meter = 47 □′ bayer.; 34 Ar = 1 bayr. Tagwerk.

3. Körpermaße.

1 Kubikmeter = 40,223495457 c′ bayer.;
1 Kubikdecimeter = 69,506180149 c″ dd.
1 Kubikmeter (Ster) = 0,319234091 b. Holzklaft.;
1 „ Fuß bayer. = 0,024861091 Kubikmeter;
1 „ Zoll dd. = 14,38721014 Kubikcentim.;
1 bayer. Holzklafter = 3,13249751 Kubikmeter.
Nahezu sind: 4 Kubikmeter = 161 c′; 47 Kubikmeter = 15 b. Holzklftr. 25 Ster = 8 b. Holzklftr.

4. Getränkmaße.

1 Liter = 0,9354301 bayer. Maßkannen;
1 Hektoliter = 1,55905 Schenkeimer zu 60 b. Maßkan.
= 1,46161 b. Visireimer zu 64 b. Maßkan.
1 b. Maßkanne = 1,069127 Liter;
1 b. Schenkeimer = 64,14162 Liter.
1 b. Visireimer = 68,4177 Liter.

Nahezu sind: 31 Liter = 29 b. Maßk.; 2 Hektolit. = 187 b. Maßk.

5. Getreidmaße.

1 Hektoliter = 0,4497259946 b. Schffl. 1 b. Metz. = 37,0596027 Liter.
Nahezu sind: 1 Metzen = 37 Liter; 9 Schäffel = 20 Hektoliter.

6. Handelsgewicht.

1 Kilogr. = 1,785714286 Pfd. b. zu 560 Gr.; 1 Pfd. b. = 1,12 Zollpfd.;
1 Grmm. = 0,22857143 bayr. Quintchen; 1 Loth = 17,5 Gramm;
1 Zollpfund zu 500 Gr. = 0,8928571429 Pfd. b.; 1 Qtch. = 4,375 Grmm.
28 Zoll-Pfund sind genau 25 bayer. Pfund.

7. Apothekergewicht.

1 Kilogr. = 2 Pfd. 9 Unz. 2 Drachm. 2 Skrupel; 1 Pfd. = 360 Gramm
1 Gramm = 16 Gran; 1 Gran = 0,0625 „
1 Pfd. = 12 Unzen; 1 Unze = 8 Drachmen; 1 Drachme = 3 Skrupel; 1 Skrupel = 20 Gran.

8. Silbergewicht.

1 Kilgr. = 3 Mark 9 Lth. 2,28571 Pf.; 1 b. Mk. zu 16 Lth. = 280 Gr.;
1 Dkgr. = 9,14286 Pf.; 1 Loth zu 16 Pf. = 17,5 Gr.;
1 Grm. = 0,91429 Pf.; 1 Pf. = 1,09375 Gramm.

9. Goldgewicht.

1 Kilogramm = 307 Kronen 14,11891 Sechzehntel (Goldgew.);
1 Dekagramm = 3 Kronen 1,2611 Sechzehntel;
1 Gramm = 4,92612 Sechzehntel;
1 Krone (Goldgewicht) = 3,24799 Gramm;
1 Kilogramm = 286 Dukaten 8,02732 Sechzehntel (Goldgew.);
1 Dekagramm = 2 Dukaten 13,84027 Sechzehntel;
1 Gramm = 4,58403 Sechzehntel.
1 Dukaten (Goldgewicht) = 3,49038 Gramm.

10. Perlen- und Juwelengewicht.

1 Gr. = 4,8569 holl. Juwelenkarat. 1 h. Juwelenk. = 20,5894 Ctgr.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Höflichkeits- und Anstandslehre für Feiertags-, Fortbildungs-, Gewerbs-, Präparanden- und Lateinschulen, sowie für Erwachsene zum Selbstunterrichte, von einem praktischen Schulmanne. Zweite Auflage. 12°. broch. Preis 7½ Sgr. oder 24 kr.

Ein erfahrener Pädagog (vid. „Aehrenlese" 1874 Nro. 6) sagt: „Dieses vortreffliche Büchlein ist weder ein pures Moral- noch auch ein bloßes Komplimentirbuch, sondern zwischen Beiden die Mitte haltend ein Schul- und Hausbuch für einen ebenso wichtigen als leider nur allzu vielfach unterschätzten und vernachlässigten Zweig der Pädagogik. Der Verfasser zeigt auf jeder Seite desselben einen entschiedenen pädagogischen Beruf, feines Gefühl für Anstand und gute Sitte und eine reiche Erfahrung auf dem Gebiete vielgestaltiger Lebensverhältnisse." — Wir empfehlen diese „Höflichkeitslehre" allen Schulmännern angelegentlich zur Beachtung, umsomehr, als selbe **durch hohe Entschließung des k. b. Kultusministeriums** vom 30. Mai 1874 zur **Anschaffung empfohlen** wurde. Dieser Umstand, sowie das so rasche Nöthigwerden einer **zweiten Auflage** überhebt uns jeder weiteren Anpreisung.

Holl, K., Neubearbeitete, planmäßig geordnete **Musterbeispiele** zur Anfertigung der schriftlichen Aufsätze 2c. Zweite Auflage. 8°. broch. Preis 8 Sgr. oder 28 kr.

Keller, F., **Doaraschleah** von oigene und frende Hecka. Eine Sammlung von Gedichten in schwäbischer Mundart. Zweite Auflage. kl. 12°. eleg. broch. Preis 8 Sgr. oder 28 kr.

Keller, F., **Etle Hagabutza.** Eine Sammlung von Gedichten in schwäbischer Mundart. Zweite Aufl.. kl. 12°. Preis broch. 10 Sgr. oder 36 kr.

Köpf, Joh., **Palästina,** oder topografische Darstellung des biblischen Schauplatzes, verbunden mit einer kurzen Welt- und Religionsgeschichte. Mit zwei Landkarten. gr. 8°. Herabgesetzter Preis 17 Sgr. oder 57 kr.

Lingg, Dr. Max, **Gmüethle.** Gedichte in der Mundart des östlichen und mittleren Allgäu. 12°. broch. Preis 8 Sgr. od. 28 kr.

Mösch, F., **Die neueren Sprachen** und ihr bildendes Element. 8°. gef. Preis 3 Sgr. oder 9 kr.

Diese interessante Abhandlung, in welcher der Verfasser in kurzen Umrissen die Geschichte der neueren Sprachen entwirft und die bildenden Momente jeder einzelnen derselben darlegt, dürfte jedem Gebildeten, auch dem Nicht-Fachmann, zur Beachtung empfohlen werden. [Magazin f. Pädagogik 1872 H. I.]

— — **Die Erziehung in Schule und Haus.** 8°. gef. Preis 2½ Sgr. oder 9 kr.

Würde die hier genannte Brochüre auch nur die auf Seite 4 und 5 gebotenen Erörterungen über das Verhältniß der deutschen Volksschule zu den Gewerbs- und Lateinschulen enthalten, sie wäre schon deßwegen allgemeiner Beachtung werth. Das sind ganz richtige Urtheile über eine Sache, von welcher die meisten Leute, so viel und je mehr man darüber reden hört, keine klaren Vorstellungen haben. Aber auch die folgenden Seiten sind des Lesens und Beherzigens im hohen Grade werth. Lehrer und Eltern werden Ursache haben, dem Verfasser für seine in wenigen Sätzen niedergelegten wohlgemeinten und der Erfahrung abgewonnenen Rathschläge in Bezug auf Unterricht und Erziehung zu danken. Sind wir auch bezüglich Dessen, was er über den deutschen Sprach- und den Religionsunterricht in der Volksschule sagt (Hr. Mösch ist sicherlich Protestant), nicht so ganz einverstanden, insofern er hinsichtlich der üblichen Methode wohl etwas zu trüb sieht, so erkennen wir doch sein Streben, Lehrer und Eltern das Beste zu rathen, an und wünschen lebhaft, daß seine

Worte nicht bloß gehört, sondern auch in Schule und Haus aufs Genaueste befolgt werden möchten. Das wohlfeile Schriftchen sei darum allen Vereinsmitgliedern bestens empfohlen! [Monika 1871 H. 36.]

Mösch, F., **Der moderne Sprachunterricht** an den bayer. Gewerbschulen. Ein Wort für Alle. 8°. geh. Preis 2 Sgr. od. 6 kr.

F. Mösch bricht in der Brochüre: „Der moderne Sprachunterricht an den bayerischen Gewerbeschulen" (Kempten, Kösel'scher Verlag) eine Lanze für eine rationellere Betreibung des Unterrichtes in modernen Sprachen. Das granum salis liegt darin, der Lehrer möge, was den Uebersetzungsstoff betrifft, in die Gedankensphäre des Schülers herabsteigen, damit diesem die fremde Sprache vertraulicher erscheine. [Grazer Tagespost 1870 Nr. 329.]

— — **Neue französische Schulgrammatik.** I. Theil. Preis 14 Sgr. oder 48 kr.

— — **Die Regeln der französischen Sprache** in Frage und Antwort. Preis 7 Sgr. oder 24 kr.

Nikl, A., **Wahrheit im Gewande der Dichtung.** 8°. Pr. 54 kr.

Neue Reichsmünztabelle für Süddeutschland. Umwandlung von Gulden und Kreuzern in Mark und Pfennige und umgekehrt in abgerundeten Werthen. 8o. 1 Bl. Carton. Preis 3 kr., aufgezogen 6 kr.

Reindel, Franz, **Leitfaden der Geografie.** Mit 24 Kärtchen in Holzschnitt und 1 Nachtrag, enthaltend die Veränderungen seit 1871. kl. 8°. Preis 12 Sgr. oder 42 kr.

Steck und Bielmayr, **Sammlung von arithmetischen Aufgaben.** 8°. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. broch. 1875.

Resultate dazu. 8°.

Stegmann, A., Die **Grundlehren der ebenen Geometrie.** Mit 9 Figurentafeln. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. 8°. 1875. Preis 20 Sgr. oder fl. 1. 12 kr.

☞ Ein Lehrbuch der **Stereometrie** von dem nämlichen Herrn Verfasser wird im Sommer 1875 erscheinen.

Weishaupt, Dr., Professor am k. Gymnasium in Kempten, **Sammlung von französischen Wörtern und Redensarten mit Angabe der Abstammung**, oder Vocabulaire étymologique, sammt einem Anhange über das Geschlecht der franz. Hauptwörter. Für Gymnasien und Lateinschulen bearbeitet. 8°. 1866. Preis 14 Sgl. oder 48 kr.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Steck, Franz Xaver / Steck, Franz Xaver / Bielmayr, Julius,

Lehrbuch der Arithmetik für Lateinschulen

Kempten 1875